

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

26. Band, Heft 3

14. Juni 1942

S. 97—144

Geschichte.

Lietzmann, Walther: Über die Frühgeschichte der Geometrie auf germanischem Boden. *Forsch. u. Fortschr.* 17, 384—385 (1941).

Bericht über Ziel, Inhalt und Probleme der in dies. Zbl. 23, 386 besprochenen Schrift.

Harald Geppert (Berlin).

Bortolotti, Ettore: *Le fonti della matematica moderna; matematica sumera e matematica babilonense.* Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, IX. s. 7, 77—97 (1940).

Eine Untersuchung der Geschichte und des Charakters der sumerischen und babylonischen Mathematik. Die etwa auf das 4. Jahrtausend v. d. Ztw. zurückgehenden sumerischen Keilschrifttexte zeigen die Beherrschung quadratischer Gleichungen, deren Lösung sich auf die Identität $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy$ gründet, und die gewöhnlich die Bestimmung von Längen bei gegebenen Flächeninhalten zum Ziele haben, die Kenntnis der elementaren gradlinigen Figuren, des Kreises, des pythagoreischen Lehrsatzes und spezieller pythagoreischer Zahlentripel. Die Aufgaben sind jedoch stets so abgefaßt, daß auch die zu ermittelnden Größen angegeben werden, und nur der Weg ihrer Auffindung ist zu beschreiben; daß sie nicht praktischen Bedürfnissen, sondern geistiger Betrachtung entsprangen, zeigt die Tatsache, daß ihre Daten stets so eingerichtet sind, daß sich alle Operationen im Sexagesimalsystem ganzzahlig oder mit endlichen Brüchen durchführen lassen. — Gegen Ende des 3. Jahrtausends wurde die sumerische Kultur durch die babylonische verdrängt und zum Teil resorbiert; da die Babylonier die logischen Schritte der Aufgabenlösungen nicht verstanden, kamen bei Abschrift der sog. Lehrtexte Verwechslungen und Entstellungen vor, die am deutlichsten den Abstand der beiden Kulturen kennzeichnen und die Ausartung des überlieferten mathematischen Wissensgutes in Kabbalistik und Geheimschriften verständlich machen. Die Ausführungen sind durch zahlreiche durchgeführte Beispiele aus den Quellen belegt.

Harald Geppert (Berlin).

Frajese, Attilio: *Taleta di Mileto e le origini della geometria greca.* Boll. Un. Mat. ital., II. s. 4, 49—60 (1941).

Die antiken Hinweise auf mathematische Leistungen des Thales werden in Übersetzung zusammengestellt. Schon Tannery hat darauf hingewiesen, daß auf Eudemos zurückgehende Nachrichten über seine theoretischen Kenntnisse aus praktischen rekonstruiert sind. So bleibt bei der geringen Sachkunde anderer Gewährsmänner nur wenig Positives übrig, im Grunde nur die Tatsache der Überlieferung ägyptischen Wissens an die Griechen durch Thales. Nebenbei wird das vollständig wiedergegebene Geometerverzeichnis des Proklos diskutiert; es ist von diesem selbst aus verschiedenen Quellen zusammengestellt, die teilweise auf Eudemos fußen. Thaeer (Detmold).

● Anderhub, J. H.: *Genetrix irrationalium. Platonis Theaetetus 147 d. Joco-Seria* aus den Papieren eines reisenden Kaufmanns, 159—222. Gedruckt in der Hauserpresse, Hans Schaefer, Frankfurt a. M. (1941). Gewidmet den Freunden des Hauses Kalle & Co. Aktiengesellschaft, Wiesbaden-Biebrich. Frankfurt a. M.: 1941. 222 S.

Unter Aufzählung der vielen unzureichenden bisherigen Deutungsversuche gibt Verf. eine neue und sehr ansprechende Erklärung der berühmten Theaetet-Stelle über das Irrationale bei Theodoros. Darnach habe Theodoros die Irrationalität der Quadratwurzeln aus den ganzen Nichtquadratzahlen von 3 bis 17 aufgewiesen (nicht bewiesen!) an einer spiralig zusammengefügtten Kette von rechtwinkligen Dreiecken mit der Einheit als der einen Kathete, indem er jeweils die Hypotenuse und die Einheitskathete herausnahm und deren Irrationalität durch gegenseitiges Abtragen ent-

sprechend dem Euklidischen Algorithmus ($X, 2$) zur Anschauung brachte. Das Verfahren sei bei $\sqrt{17}$ abgebrochen worden, weil sich für $\sqrt{18}$ eine für das Sandzeichnen verwirrende Überdeckung mit dem Ausgangsdreieck $(1, 1, \sqrt{2})$ ergeben hätte. Verf. folgert, dem Theodoros gehöre der Grundgedanke von Euklid, Elemente $X, 2$ und $X, 9$ und das „Aufweisen“ der Irrationalitäten, dem Theaetet und dem Eudoxos der strenge Aufbau der Theorie. Der Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$ mittels des Schlusses von Gerade und Ungerade entstamme frühestens der Platonischen Schule; vielleicht gehöre er dem Aristoteles, der ihn so häufig erwähnt. *J. E. Hofmann.*

● Favaro, Antonio: Archimede. 2. ediz. (Profili Nr. 21.) Milano: Casa Edit. Bietti 1940. 88 pag.

Das in der zweiten Auflage, soweit ich feststellen konnte, unveränderte Büchlein schildert in populärer Weise des Archimedes Leben und Wirken, indem es, freilich nicht immer zustimmend, auch alle überlieferten Fabeln zusammenträgt. Aus den Schriften werden die Hauptresultate angeführt, mathematische Entwicklungen nicht gegeben. Die Bibliographie reicht bis 1910, spätere Arbeiten sind nicht benutzt.

Thaer (Detmold).

● Favaro, Antonio: Galileo Galilei. 3. ediz. Milano: 1939. 75 pag. e 1 pl.

Kähler, E.: Über die Beziehungen der Mathematik zu Astronomie und Physik. Jber. Dtsch. Math.-Verein. 51, Abt. 2, 52—63 (1941).

Die Entfremdung zwischen der Mathematik und ihren Schwesterwissenschaften führt zur Frage nach der gegenseitigen Bindung. Verf. sucht sie durch eine geschichtliche Betrachtung zu beantworten: Im 18. Jahrhundert ist höchstes Thema das Dreikörperproblem, das der Mathematik eine einheitliche Zielsetzung gibt. Im 19. Jahrhundert zeigen die Arbeiten von Maxwell die überragende Bedeutung der Mathematik für die Physik. Die Lockerung der engen Beziehungen tritt dennoch ein, von seiten der Mathematiker durch die Hinwendung zu großen, nicht aus der Anwendung stammenden innermathematischen Problemen beginnend mit Abel. So ist den drei Wissenschaften die Gemeinsamkeit der Ziele verlorengegangen, trotzdem sie „Teile eines einzigen geistigen Imperiums“ sind. Ihr Ziel „findet die Mathematik als ein noch nicht ausgereiftes Organ der Erkenntnis in ihrem eigenen Wachstum“. *Kraft.*

Fujiwara, M.: Miscellaneous notes on the history of Chinese mathematics. 3. Tôhoku Math. J. 47, 309—321 (1940).

Fujiwara, M.: Miscellaneous notes on the history of Wazan. 6. Tôhoku Math. J. 47, 322—338 (1940) [Japanisch].

Katô, Heizaemon: On the catenary in the old Japanese mathematics. Tôhoku Math. J. 47, 279—293 (1940) [Japanisch].

Sergescu, P.: Le professeur G. Bratu. Mathematica, Timișoara 17, 137—142 (1941). Biographie mit Schriftenverzeichnis. *Harald Geppert (Berlin).*

Algebra und Zahlentheorie.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Rédei, L.: Zur Gaussischen Theorie der Reduktion binärer quadratischer Formen. Acta Sci. Math. Szeged 10, 134—140 (1941).

Obschon die Theorie der reduzierten indefiniten binären quadratischen Formen und noch mehr die damit gleichwertige der reduzierten Zahlen eines quadratischen Zahlkörpers oder Zahlringes geradezu zwangsläufig zu Kettenbrüchen führt, ist Verf. der Ansicht, daß damit ein Schritt in ein fremdes Gebiet getan würde, der vermieden werden müsse. Er gibt deshalb eine von der Beziehung zu Kettenbrüchen freie Entwicklung der Reduktionstheorie, die zudem kürzer als die sonst üblichen Darstellungen sein soll.

Brandt (Halle).

Schilling, O. F. G.: Remarks on a special class of algebras. Amer. J. Math. 62, 346—352 (1940).

Hasse [J. reine angew. Math. 172, 37—54 (1934); dies. Zbl. 10, 5] und Witt [Math. Ann. 110, 12—28 (1934); dies. Zbl. 9, 193] haben gezeigt, daß die Struktur normaler, einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und zyklisch erzeugbaren algebraischen Funktionenkörpern durch die Arithmetik des Grundkörpers beschrieben werden kann. Verf. untersucht in vorliegender Note Algebren über algebraischen Funktionenkörpern einer Variablen, deren Koeffizientenkörper nur zyklischer Erweiterungen fähig sind. Der Satz von der Summe der lokalen Invarianten bleibt gültig. Die Resultate des Verf. zeigen, daß aus der Gültigkeit des Normensatzes nicht auf das Reziprozitätsgesetz geschlossen werden kann. Im einzelnen wird bewiesen: 1. Es seien T ein Körper mit nur zyklischen Erweiterungen und C ein bezüglich einer Bewertung \mathfrak{p} perfekter Körper mit T als Restklassenkörper. C_n bezeichne die unverzweigten Erweiterungen vom Grade n über C , F_n die erzeugenden Automorphismen der Galoisgruppen von C_n über C . Dann gilt: Alle Einheiten von C sind Normen von Einheiten aus C_n . Jede normale, einfache Algebra \mathfrak{A} über C ist ähnlich einer zyklischen Algebra $(C_n/C, F_n, \pi)^r$, wo π ein festes Primelement für \mathfrak{p} bedeutet. Die Restklasse $\frac{r}{n} \bmod 1$ wird wie üblich als Invariante von \mathfrak{A} definiert. Bei festem F und π ist die Klasse von \mathfrak{A} durch ihre Invariante eindeutig bestimmt. 2. Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen mit dem Konstantenkörper T . Dann gilt $\sum_{\mathfrak{p}} r(\mathfrak{p}) \equiv 0 \bmod 1$ für die lokalen Invarianten $r(\mathfrak{p})$ einer beliebigen Algebra \mathfrak{A}/K . Ist insbesondere $K = T(x)$, so ist die Klassengruppe der normalen Algebren über K isomorph zu einer Untergruppe S der additiven Gruppe $\{r(\mathfrak{p})\}$ aller Vektoren rationaler Zahlen mod 1. S besteht aus allen Vektoren, für welche $\sum_{\mathfrak{p}} r(\mathfrak{p}) \equiv 0 \bmod 1$ und $r(\mathfrak{p}) = 0$ für fast alle \mathfrak{p} ist.

H. L. Schmid (Berlin).

Schmid, Hermann Ludwig: Zur Meromorphismentheorie der elliptischen Funktionenkörper. Math. Z. 47, 399—421 (1941).

In der Hasseschen Theorie der Meromorphismen elliptischer Funktionenkörper (dies. Zbl. 14, 149, 249) wird die Struktur des Meromorphismenringes aus der Normenadditionsformel

$$(1) \quad N(\mu + \nu) + N(\mu - \nu) = 2N(\mu) + 2N(\nu)$$

abgeleitet, die aus der Divisorendarstellung

$$x\mu - x\nu \cong \frac{\mathfrak{o}(\mu + \nu)\mathfrak{o}(\mu - \nu)}{(\mathfrak{o}\mu\mathfrak{o}\nu)^2}$$

entspringt, indem die Grade von Zähler und Nenner rechts verglichen werden. Dabei ist eine erzeugende Gleichung

$F(x, y) \equiv y^2 + f(x)y + g(x) = 0$; $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$, $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + x^3$ des Funktionenkörpers K zugrunde gelegt, und \mathfrak{o}^2 ist der Nenner von x , \mathfrak{o}^3 der von y . In der analytischen Theorie kann (1) auf

$$\wp(u_1) - \wp(u_2) = -\frac{\sigma(u_1 + u_2)\sigma(u_1 - u_2)}{(\sigma(u_1)\sigma(u_2))^2}$$

zurückgeführt werden. Verf. zeigt nun, daß allen klassischen Formeln, die durch \wp und \wp' ausgedrückte elliptische Funktionen von mehreren Veränderlichen als Produkte von σ -Funktionen darstellen, in der allgemeinen Theorie Formeln wie (1) entsprechen [die nur insofern weniger allgemein sind, als den $\wp(u_1)$, $\wp'(u_1)$, $\wp(u_2)$, $\wp'(u_2)$, ..., Funktionen von voneinander unabhängigen Veränderlichen u_1, u_2, \dots , die Elemente $x\mu_1, y\mu_1, x\mu_2, y\mu_2, \dots$ des einen Funktionenkörpers K entsprechen; μ_1, μ_2, \dots sind dabei beliebige Meromorphismen]. Als rechnerische Grundlage dienen explizite Additionstheoreme für mehrgliedrige Argumentsysteme, die $x(\mu_1 + \dots + \mu_n)$ und $y(\mu_1 + \dots + \mu_n)$ durch $x\mu_1, x\mu_2, \dots; y\mu_1, y\mu_2, \dots$ ausdrücken. Insbesondere wird

$$x(\mu + \nu) - x(\mu - \nu) = F_y(x\mu, y\mu)F_y(x\nu, y\nu)(x\mu - x\nu)^{-2} = d(x\mu)d(x\nu)$$

gezeigt, was für einen neuen Beweis von (1) gebraucht wird. Der klassischen Formel

$$|1 \quad \wp(u_i) \quad \wp'(u_i) \quad \dots \quad \wp^{(n-2)}(u_i)|_{i=1, \dots, n} = \text{const.} \cdot \sigma\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) \prod_{i>j} \sigma(u_i - u_j) : \prod_{i=1}^n \sigma(u_i)^n$$

entspricht die Divisorendarstellung

$$D(\mu_1, \dots, \mu_n) \cong \mathfrak{o}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right) \prod_{i>j} \mathfrak{o}(\mu_i - \mu_j) : \prod_{i=1}^n (\mathfrak{o} \mu_i)^n$$

für die Determinante

$$D(\mu_1, \dots, \mu_n) = |z_1 \mu_i \quad \dots \quad z_n \mu_i|_{i=1, \dots, n},$$

in der z_1, \dots, z_n eine Basis der Multipla von \mathfrak{o}^{-n} und μ_1, \dots, μ_n voneinander und von Null verschiedene Meromorphismen mit von 0 verschiedener Summe bedeuten. Ist $\sum \mu_i = 0$, so wird $D(\mu_1, \dots, \mu_n) = 0$. Aus dem Divisor von $D(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ergibt sich die symmetrische Normenadditionsformel

$$N(\mu + \nu + \varrho) - (N(\mu + \nu) + N(\nu + \varrho) + N(\varrho + \mu)) + N(\mu) + N(\nu) + N(\varrho) = 0.$$

Sind alle μ_i einander gleich, so tritt an Stelle von $D(\mu_1, \dots, \mu_n)$ die Differentialdeterminante

$$\Delta_n = |D^{(i-1)} z_1, \dots, D^{(i-1)} z_n|_{i=1, \dots, n}$$

deren Divisor zu $\mathfrak{o}^n/\mathfrak{o}^{n^2}$ berechnet wird, der klassischen Formel

$$\begin{vmatrix} \wp'(u) & \wp''(u) & \dots & \wp^{(n-1)}(u) \\ \wp''(u) & \wp'''(u) & \dots & \wp^{(n)}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \wp^{(n-1)}(u) & \wp^{(n)}(u) & \dots & \wp^{(2n-3)}(u) \end{vmatrix} = \text{const.} \frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}}$$

entsprechend. Die Beweise beruhen auf der bemerkenswerten Rekursionsformel

$$D(\mu_1, \dots, \mu_{n+1}) D(\mu_1, \dots, -\mu_{n+1}) = \left(x \mu_{n+1} - x \left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right)\right) D(\mu_1, \dots, \mu_n)^2 \prod_{i=1}^n (x \mu_{n+1} - x \mu_i),$$

und der Tatsache, daß

$$D(\mu_1, \dots, \mu_{n+1}) D(\mu_1 + \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n, -\mu_{n+1}) D(\mu_1, \mu_2, -\mu_{n+1})$$

bei Vertauschung von $+\mu_{n+1}$ mit $-\mu_{n+1}$ invariant ist. Deuring (Jena).

Deuring, Max: *La teoria aritmetica delle funzioni algebriche di una variabile.* Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. 2, 361—412 (1941).

Eine zusammenfassende Darstellung der neueren Entwicklung der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Die Grundlagen: Körpertheorie, Divisoren, Riemann-Rochscher Satz, Differentiale, werden möglichst kurz abgetan: für die Beweise wird auf die Abhandlungen von F. K. Schmidt (s. insbes. dies. Zbl. 1, 54; 14, 341) verwiesen. Dann wird die Artinsche Zetafunktion eingeführt, ihre Funktionalgleichung nach Schmidt bewiesen und die Riemannsche Vermutung formuliert. Der Beweis, den Hasse (s. dies. Zbl. 14, 149, 249) für den Fall des Geschlechtes Eins gegeben hat, beruht auf dem Begriff des komplexen Multiplikators. Dieser wird für beliebiges Geschlecht nach Verf. (s. dies. Zbl. 16, 346) mit Hilfe von algebraischen Korrespondenzen eingeführt; sodann wird die Riemannsche Vermutung für Geschlecht Eins bewiesen. Zum Schluß wird die Deuringsche Weiterentwicklung der Theorie der komplexen Multiplikation gestreift. van der Waerden (Leipzig).

Zahlentheorie:

Griffiths, L. W.: *Universal functions of extended polygonal numbers.* Amer. J. Math. 63, 726—728 (1941).

Schließt sich an eine frühere Arbeit des Verf. an, über die in Zbl. 6, 100 berichtet ist; dort auch Näheres über Benennungen und Bezeichnungen. In dieser früheren Arbeit sind alle Funktionen, die universal sein können, für $m \geq 6$ bestimmt worden, bei denen die Summe der Koeffizienten $\leq m$ ist. Gewisse von ihnen sind dort als universal festgestellt worden. Hier wird dasselbe von den übrigbleibenden Funktionen gezeigt. L. Schrutka (Wien).

Lambert, G.: Sur les nombres de Pythagore. *Mathesis* 54, 227—230 (1940).

Verf. beweist: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von positiven ganzen, zueinander primen Zahlen, die den Gleichungen (1) $x^2 + y^2 = z^2$ und (2) $x - y = \pm A$ genügen, ist, daß die ganze Zahl A eine Primzahl der Form $8m - 1$ oder $8m + 1$ oder daß sie ein Produkt von Primzahlen dieser Form ist. Aus dem Beweis folgt weiterhin: Ist A ein Produkt aus p voneinander verschiedenen Primzahlen der Formen $8m - 1$, $8m + 1$, so gibt es 2^p unendliche Folgen von primitiven Lösungen von (1) und (2). — In dem Beispiel $A = 2737 = 7 \cdot 17 \cdot 23$ werden die $2^3 = 8$ Lösungen angegeben, aus denen die 8 unendlichen Folgen von Lösungen entwickelt werden können.

Anders (Flensburg-Mürwik).

Oblath, Richard: Über unlösbare diophantische Gleichungen der Form $x^m + 1 = y^n$. *Rev. mat. hisp.-amer.*, IV. s. 1, 122—140 (1941) [Spanisch].

Aus der Annahme einer nichttrivialen Lösung der diophantischen Gleichung

$$(1) \quad x^2 - 1 = y^n$$

werden einschneidende Bedingungen für n , x und y hergeleitet, die für „kleine“ Werte überhaupt unerfüllbar sind. Insbesondere wird bewiesen: (1) ist in ganzen Zahlen $x \neq 0$, $y \neq 0$ unlösbar, wenn $n > 3$ eine Primzahl und eine der beiden Bedingungen

$$(2) \quad 2^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n^2}, \quad (3) \quad 3^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n^2}$$

erfüllt ist, insbesondere deshalb für alle Primzahlen n mit $3 < n < 16000$. Zu diesem Zweck wird (1) auf eine Gleichung der Gestalt

$$(4) \quad u^n \pm 1 = 2^\alpha v^n \quad (\alpha > 1)$$

zurückgeführt und für jede Gleichung der Gestalt (4) bewiesen, daß sie in ganzen Zahlen u , v mit $u \neq 0$, $\pm 1 \pmod{n}$, $v \not\equiv 0 \pmod{n}$ unlösbar ist, sobald n eine Primzahl ist und einer der Bedingungen (2) und (3) genügt. Ähnliche Untersuchungen über die allgemeinere diophantische Gleichung $x^m + 1 = y^n$ schließen sich an. Weber.

Yamada, Kaneo: Berichtigung zu der Note: Eine Bemerkung zum Fermatschen Problem. *Tôhoku Math. J.* 48, 193—198 (1941).

Vgl. dies. Zbl. 23, 8. Im ersten Teil zeigt Verf., wie seine früheren Ergebnisse durch Hinzufügen einiger Nebenbedingungen und durch einige Modifikationen richtig zu gestalten sind. Es sei p eine Primzahl, g eine durch p nicht teilbare positive ganze Zahl und i eine nicht negative ganze Zahl. g_i und \bar{g}_i seien die kleinsten positiven Reste von $g^i \pmod{p}$ bzw. $\pmod{p^2}$. Es sei $T(g^i) = (\bar{g}_i - g_i)/p$ definiert und $T(g^{p-1}) = Q(g)$, $T(g^{p(p-1)-1}) = K(g)$ gesetzt. Dann ist, wie Verf. beweist, wenn h die Bedeutung g_{p-2} hat, $Q(g) + Q(h) \equiv gK(g) \pmod{p}$, und falls $0 < g < p$ ist, auch $\equiv hK(h) \pmod{p}$. Wenn g eine primitive Wurzel von p^2 ist oder auch nur eine solche primitive Wurzel von p , für die $Q(g) \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist, so gibt es zu jedem ganzen $i \geq 0$ eine ganze Zahl $\sigma \geq 0$, derart, daß $T(g^{i+\sigma(p-1)}) = 0$ gilt. Ist σ so bestimmt, so bestehen die Kongruenzen

$$T(g^{i+(\sigma+j)(p-1)}) \equiv jT(g^{i+(\sigma+1)(p-1)}), \quad T(g^{i+(\sigma+1)(p-1)}) \equiv g^i T(g^{p-1}) \pmod{p}.$$

Weiter werden die Kongruenzen

$$Q(g_i) \equiv iQ(g) + T(g^i)/g^i \pmod{p}, \\ K(g_i) \equiv -Q(g)/g^i + T(g^i)/g^{2i} + T(g^{p-1-i}) \pmod{p}$$

bewiesen. — Im zweiten Teil, der von den Ergebnissen des ersten keinen Gebrauch macht, leitet Verf. aus den Eisensteinschen Kongruenzen $Q(tp \pm g) \equiv Q(g) \mp t/g \pmod{p}$ und $Q(gh) \equiv Q(g) + Q(h) \pmod{p}$, wo g und h beliebige zu p teilerfremde ganze Zahlen bedeuten, und aus den Kriterien von Wieferich, Mirimanoff, Vandiver usw. [$Q(2) = 0$, $Q(3) = 0$, ...] das bekannte Ergebnis von Gottschalk (s. dies. Zbl. 18, 5) her. — Druckfehler: S. 194, Zeile 5 v. o. muß es $Q(h)$ statt $Q(g)$ heißen. S. 194, Zeile 6 v. o. muß das letzte Glied im Zähler des zweiten Bruchs $-h \pmod{p}$ statt $-h$ heißen. S. 197, Zeile 2 v. u. muß der Faktor p vor $Q(tp \pm g)$ fehlen. Bessel-Hagen.

Iseki, Kaneshirō: Ein Theorem der Zahlentheorie. Tôhoku Math. J. 48, 60—63 (1941).

Ist $Q_k(n)$ die Anzahl aller Darstellungen einer natürlichen Zahl n als Summe von k natürlichen Zahlen ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, so behauptet Verf.:

$$Q_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!} (n \rightarrow \infty). \quad \text{Edmund Hlawka (Wien).}$$

Olds, C. D.: On the number of representations of the square of an integer as the sum of three squares. Amer. J. Math. 63, 763—767 (1941).

Es sei $N_r(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von r Quadraten. Zwei Darstellungen gelten als gleich, wenn sich die Basen der Quadrate nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Wenn $n^2 = 2^{2a} P^2 Q^2$, $P^2 Q^2 \equiv 1 \pmod{8}$, $Q = \prod_{v=1}^s q_v^{a_v}$, P das Produkt der Primzahlen von der Gestalt $4k+1$, q_1, \dots, q_s die Primzahlen von der Gestalt $4k+3$ sind, dann ist

$$N_3(n^2) = 6P \prod_{v=1}^s [q_v, a_v], \quad \text{wo} \quad [q_v, a_v] = q_v^{a_v} + 2(q_v^{a_v} - 1)/(q_v - 1).$$

Der Verf. zeigt dies mit einer Methode, die eine Verallgemeinerung einer Methode von Stieltjes ist.

Hofreiter (Wien).

Gupta, Hansraj: On the absolute weight of an integer. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 12, 60—62 (1940).

Jede natürliche Zahl n werde als Summe von $s_k(n)$ k -ten Potenzen dargestellt: $n = \sum_{i=1}^s a_i^k$. Dabei werden die a_i durch die Ungleichungen $a_{j+1}^k \leq n - \sum_{i=1}^j a_i^k < (a_{j+1} + 1)^k$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) bestimmt. Es handelt sich nun um eine Abschätzung von $\max_{1 \leq y \leq x} s_k(y) = M_k(x)$. Verf. beweist:

$$M_k(x) = (\log \log x - \log k)/(\log k - \log(k-1)) + M_k(2^k k^k) + O(k \log \log k)$$

Edmund Hlawka (Wien).

Pillai, S. S.: A note on Gupta's previous paper. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 12, 63—64 (1940).

Diese Note ist eine Weiterführung der vorstehend besprochenen Untersuchung von Gupta. Verf. beweist folgende verschärfte Abschätzungen:

$$M_k(x) = \{\log \log x - \log \log(2^{k-1} k^{k-1})\}/(\log k - \log(k-1)) + M_k(2^{k-1} k^{k-1}) + O(1)$$

$$\text{und} \quad M_k(x) = \{\log \log x - \log k\}/(\log k - \log(k-1)) + M_k(2^k k^k) + O(k).$$

Edmund Hlawka (Wien).

Molsen, Karl: Zur Verallgemeinerung des Bertrand'schen Postulates. Dtsch. Math. 6, 248—256 (1941).

Verf. zeigt auf elementarem Wege, also ohne Anwendung der Riemannschen ζ -Funktion, aber unter Ausnützung tiefliegender Sätze der Tschebyscheff'schen Primzahltheorie, daß es für $n \geq 199$ im Intervall $(n, \frac{3}{2}n]$ mindestens je eine Primzahl der Form $3x+1$ und $3x+2$ mit x als natürlicher Zahl gibt, weiter, daß für $n \geq 118$ im Intervall $(n, \frac{3}{2}n]$ jede zu 12 prime Restklasse mod 12 mindestens durch eine Primzahl vertreten ist.

Holzer (Graz).

Poletti, Luigi: L'atlante di oltre 60000 numeri primi fra 10 milioni e 3 miliardi (et ultra), estratti da serie quadratiche. Atti Accad. Italia, Mem. 11, 725—751 (1940).

Verf. beschreibt einen Atlas von über 60000 Primzahlen zwischen 10^6 und $3 \cdot 10^9$, die aus quadratischen Reihen (arithmetischen Reihen zweiter Ordnung) entnommen sind. Der Atlas ist eine Erweiterung eines Verzeichnisses (Elenco) von 17200 Primzahlen aus dem Jahre 1931; siehe über dieses und über Anlage und Zweck solcher Zusammenstellungen dies. Zbl. 3, 101. In einigen Tafeln sind die quadratischen Reihen und die Anzahlen der angeführten Primzahlen genauer angegeben. Der Atlas selbst

ist auf Anordnung der R. Accademia d'Italia in einer Abschrift beim Consiglio Nazionale delle Ricerche hinterlegt und der öffentlichen Einsicht zugänglich gemacht worden.
L. Schrutka (Wien).

Teghem, J.: Les sommes de Weyl. (*Liège, 17.—22. VII. 1939.*) C. R. Congr. Sci. Math. 84—88 (1939).

Un exposé sur les sommes de Weyl (et les sommes de Weyl généralisées) et leurs applications dans la théorie des nombres. L'auteur énonce quelques résultats nouveaux auxquels donne lieu la belle méthode de Vinogradow qui a apporté déjà un grand nombre d'améliorations dans la théorie des nombres. *J. F. Koksma* (Amsterdam).

Tietze, Heinrich: Komprimierte Gitterpunktmenge und eine additiv-zahlen-theoretische Aufgabe. *J. reine angew. Math.* 184, 49—64 (1942).

Vgl. Verf., Partitionen und Gitterpunktmenge (dies. Zbl. 25, 28, 29, 108—110, 253). — Es seien n Partitionen $\mathfrak{A}^{(v)} = (a_1^{(v)}, a_2^{(v)}, \dots, a_{k_v}^{(v)})$ einer natürlichen Zahl m gegeben. Es wird die Aufgabe $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}'|\mathfrak{A}''|\dots|\mathfrak{A}^{(n)})$ gestellt, im n -dimensionalen Raum eine Menge \mathfrak{M} von Gitterpunkten mit positiven Koordinaten so anzugeben, daß (für jedes v) in der Ebene $x_v = \mu$ genau $a_\mu^{(v)}$ Gitterpunkte von \mathfrak{M} liegen. Gefragt wird nach der Anzahl $N = N(\mathfrak{A}'|\mathfrak{A}''|\dots|\mathfrak{A}^{(n)})$ von solchen Gitterpunktmenge. Hier wird der besondere Fall betrachtet, daß die Gitterpunktmenge \mathfrak{M}_0 , von der ausgegangen wird, komprimiert ist. Ist $n = 2$ und sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die aus einer zweidimensionalen komprimierten Gitterpunktmenge \mathfrak{M}_0 hergeleiteten (einander konjugierten) Partitionen, so ist $N(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = 1$. Es gibt also außer \mathfrak{M}_0 keine weitere Gitterpunktmenge, die eine Lösung der Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})$ wäre. Für $n \geq 3$ hingegen läßt sich stets eine n -dimensionale komprimierte Gitterpunktmenge \mathfrak{M} so finden, daß für die aus \mathfrak{M} hergeleiteten Partitionen $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \dots, \mathfrak{A}^{(n)}$ die Ungleichung $N(\mathfrak{A}'|\mathfrak{A}''|\dots|\mathfrak{A}^{(n)}) > G$ erfüllt ist. Dabei ist G eine beliebig groß gewählte natürliche Zahl. Man kann also noch mindestens G weitere Gitterpunktmenge $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_G$ finden, die alle auf dasselbe System von Partitionen $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \dots, \mathfrak{A}^{(n)}$ führen, also sämtlich Lösungen der Aufgabe $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}'|\mathfrak{A}''|\dots|\mathfrak{A}^{(n)})$ sind. Beim Beweis kann man sich auf den Fall $n = 3$ beschränken. Dafür wird der Beweis derart geführt, daß für jeden Wert der ganzen Zahl $h \geq 1$ eine Gesamtheit von $2^h = g$ Gitterpunktmenge $\mathfrak{M}_h^{(1)}, \mathfrak{M}_h^{(2)}, \dots, \mathfrak{M}_h^{(g)}$ angegeben wird, die sämtlich komprimiert sind und in den zugehörigen 3 Partitionen $(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}|\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}_h|\mathfrak{B}_h|\mathfrak{C}_h)$ übereinstimmen, so daß $N(\mathfrak{A}_h|\mathfrak{B}_h|\mathfrak{C}_h) \geq 2^h$ ist. Zuletzt werden noch nähere Ausführungen über den für $n \geq 3$ abgeleiteten Satz gegeben. *Hofreiter*.

Tietze, Heinrich: Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren. 5. Der Hauptsatz über den Umbau komprimierter Gitterpunktmenge. *S.-B. Bayer. Akad. Wiss.* 1941, 1—37 (H. 1).

(Zu Teil 1—4 vgl. dies. Zbl. 25, 28, 108—110.) — Um eine Übersicht über die Ordnungsbeziehungen zwischen komprimierten Gitterpunktmenge $\mathfrak{R}_m^n, \mathfrak{R}_m^{n*}$ (m Grad, n Dimension) zu erhalten, betrachtet man gewisse elementare Umbauten, durch die \mathfrak{R} in \mathfrak{R}^* übergeführt wird, und zwar so, daß \mathfrak{R}^* von \mathfrak{R} möglichst wenig abweicht, so daß der einzelne elementare Prozeß nicht weiter in kleinere Schritte zerlegt werden kann. Bei $n = 2$ wird nur ein Punkt in eine neue Lage gebracht, bei $n = 3$ werden manchmal mehrere auf einer ganzen Strecke liegende Punkte abgeändert. Unter diesen Punkten befindet sich stets ein einziger Eckpunkt der umzubauenden Menge. Bei beliebigem n ist die Anzahl der bei einem einzigen elementaren Umbau verlagerten Eckpunkte keiner Einschränkung unterworfen. Bei einer beliebigen Dimension $n = p + 2$ ($p \geq 1$) mit den Koordinaten x_1, \dots, x_p, y, z betrachtet man solche Umbauten, bei denen jeder Punkt alle Koordinaten bis auf y und z beibehält. Jede komprimierte Gitterpunktmenge \mathfrak{R}_m^n , sofern nicht alle ihre Punkte in $z = 1$ liegen, gestattet einen elementaren zy -Umbau. Im Hauptsatz über den Umbau komprimierter Gitterpunktmenge wird auseinandergesetzt, wann man von einer komprimierten Gitterpunktmenge zu einer anderen durch elementaren Umbau gelangen kann. Damit

ermöglicht sich auch eine vollständige Gliederung der komprimierten Gitterpunktmengen nach Stammbäumen. *Hofreiter (Wien).*

Tietze, Heinrich: Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren. 6. Konvexe Polygonzüge und Partitionen nebst deren Ordnungsbeziehungen. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1941, 39—55 (H. 1).

Die Ordnungsbeziehungen zwischen Partitionen lassen sich geometrisch mit Hilfe gewisser konvexer Polygonzüge deuten. Die Gesamtheit der zu einer Zahl m gehörenden Polygonzüge ist eine vollständig oder teilweise geordnete Menge. Unter den Ordnungsbeziehungen zwischen 2 Partitionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$ spielen die elementaren, d. h. diejenigen, für die es keine dritte Partition $\mathfrak{A}^{(1)}$ mit $\mathfrak{A} > \mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{A}^{(1)} > \mathfrak{A}^*$ gibt, eine größere Rolle. Für die elementaren Ordnungsbeziehungen können 3 Typen unterschieden werden. *Hofreiter (Wien).*

Veress, Paul: Graphische Lösung von diophantischen Gleichungen. Mat. fiz. Lap. 48, 393—397 u. dtsh. Zusammenfassung 397 (1941) [Ungarisch].

Der folgende bekannte Satz wird auf elementar-geometrischem Wege neu bewiesen: Ein Parallelogramm, dessen Eckpunkte Gitterpunkte (d. h. Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) sind, ist dann und nur dann vom Flächeninhalt 1, wenn auf ihm (Begrenzung inbegriffen) außer den Eckpunkten keine weiteren Gitterpunkte liegen. — Aus diesem Satz werden die bekannten Sätze über die diophantische Gleichung $ay - bx = 1$ auf geometrischem Wege hergeleitet und eine graphische Methode zur Auffindung der Grundlösung ($0 \leq x < a, 0 < y < b$) dieser Gleichung angegeben. *Béla v. Sz. Nagy (Szeged).*

Hajós, G.: Über Gitterparallelogramme. Mat. fiz. Lap. 48, 398—400 u. dtsh. Zusammenfassung 400 (1941) [Ungarisch].

Zu dem im vorstehenden Referat zitierten bekannten Satze wird ein weiterer Beweis gegeben, der ebenfalls elementargeometrisch ist. Der Beweis besteht darin, daß das Parallelogramm und das Einheitsquadrat in paarweise kongruente Teile zerschnitten werden. — Satz und Beweis lassen sich mühelos auf den n -dimensionalen Raum übertragen. *Béla v. Sz. Nagy (Szeged).*

Analysis.

Mengenlehre:

● **Fischer, Ludwig:** Die abzählbare Menge. Zweiter Teil von „Grundlagen der Philosophie und der Mathematik“. Leipzig: Felix Meiner 1942. V, 57 S. RM. 2.80.

Als den Hauptzweck der Schrift bezeichnet Verf. den Nachweis, daß keine unabzählbare Menge existiert. Eine Menge M wird (S. 19) als „unabzählbar“ bezeichnet, wenn sie in eine abzählbar-unendliche Teilmenge M' und eine von Null verschiedene Restmenge $M - M'$ derartig zerfällbar ist, daß weitere Elemente der Restmenge nicht mit der Teilmenge M' zu einer abzählbaren Menge vereinigt werden können. Nach dieser Definition kann es allerdings keine unabzählbare Menge geben, doch versteht die Mathematik unter unabzählbar etwas anderes, nämlich die Negation von abzählbar. Beide Begriffe werden aber anscheinend vermengt. Ebenso findet sich beim Verf. der Satz: Jede wohlgeordnete Menge ist abzählbar. Als Definition der Wohlordnung wird folgendes gegeben (S. 12): Werden Elemente einer Menge, mit einem ersten Element beginnend, so zu einer Folge geordnet, daß jedes Element außer einem etwaigen letzten Element einen (und nur einen) unmittelbaren Nachfolger hat, so heißt die so geordnete Menge wohlgeordnet. D. h. also z. B. die Menge 1, 3, 5, 7,, 8, 6, 4, 2, 0 wäre beim Verf. wohlgeordnet. Natürlich würde auch aus dieser Definition der Wohlordnung sich nicht die Abzählbarkeit ergeben. Derartige Begriffsverwirrungen und Unklarheiten finden sich mehr. So wird ω als die absolut erste transfinite Zahl bezeichnet, die allen natürlichen Zahlen nachfolgt, ohne daß irgendein Unterschied zwischen Kardinalzahlen und Ordinalzahlen gemacht wird. Daher findet sich auf S. 13 die merkwürdige Be-

ziehung $2^\omega = \aleph_0$, wobei übrigens die Potenz nirgends definiert wird. Das Angegebene dürfte zur Charakterisierung der Schrift genügen. (Erster Teil vgl. dies. Zbl. 8, 97.)
Ackermann (Burgsteinfurt).

Sierpiński, W.: Sur une propriété des ensembles ordonnés. Acta Pontif. Acad. Sci. 4, 207—208 (1940).

Cette note démontre le théorème suivant: ν étant un nombre ordinal quelconque, tout ensemble ordonné de puissance \aleph_ν est semblable à un ensemble de suites transfinies ayant chacune pour type ω_ν , formées des nombres 0 et 1 et ordonnées d'après le principe des premières différences. Dans ce théorème le nombre ordinal ω_ν ne peut pas être remplacé par un nombre ordinal (transfini) plus petit. A. Appert.

Sierpiński, Waclaw: Sur l'existence d'un ensemble indénombrable à propriété λ' . Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 10, 353—354 (1940).

On dit qu'un ens. linéaire E jouit de la propriété λ' , s'il existe, pour tout ens. linéaire dénombrable D , un ens. linéaire H qui est un G_δ tel que $E \cdot H \subset D \subset H$ (en d'autres termes, si tout ens. linéaire dénombrable D est un G_δ relativement à l'ens. $E + D$). — L'A. démontre ici, sans utiliser l'hypothèse du continu, qu'il existe un ens. linéaire indénombrable jouissant de la propriété λ' . Les démonstrations antérieurement connues faisaient appel à cette hypothèse. — Ce résultat se déduit sans peine du théorème suivant de M. Hausdorff (ce Zbl. 14, 54) qui fait appel à l'axiome du choix sans utiliser l'hypothèse du continu: Il existe une suite transfinie $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha < \Omega}$ de type Ω , formée d'ens. linéaires G_δ et telle que $\Gamma_\xi \subset \Gamma_\eta$ et $\Gamma_\xi \neq \Gamma_\eta$ pour $\xi < \eta < \Omega$ et que la réunion de tous les Γ_α ($\alpha < \Omega$) soit l'ens. de tous les nombres réels.

A. Appert (Rennes).

Sierpiński, Waclaw: Exemple effectif d'une famille de 2^{\aleph_1} ensembles linéaires croissants. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 10, 355—356 (1940).

L'A. donne une définition effective d'une famille F de 2^{\aleph_1} ensembles linéaires croissants (c'est-à-dire tels que deux ens. de la famille F sont toujours distincts et que toujours l'un d'eux est inclus dans l'autre). La construction de la famille F est fondée d'une part sur le lemme suivant, qui peut être regardé comme une extension aux ens. dénombrables de nombres ordinaux d'un résultat connu de M. H. Lebesgue [J. Math. pures appl., VI. s. 1, 139—216 (1905), 213]: Lemme. On sait définir effectivement une fonction univoque $f(D)$ qui fait correspondre à tout ens. dénombrable D de nombres ordinaux $\geq \omega$ et $< \Omega$ un ens. linéaire non vide $f(D)$ de sorte que l'on ait toujours $f(D) \cdot f(D') = 0$ pour $D \neq D'$ et d'autre part sur la considération d'un certain ens. de suites transfinies de type Ω formées des nombres 0 et 1, cet ens. de suites étant ordonné d'après le principe des premières différences. Les résultats précédents sont obtenus sans faire appel à l'hypothèse du continu. — L'A. avait démontré dans Fundam. Math. 3, 109—112 (1922), sans faire appel à l'hypothèse du continu mais en utilisant seulement l'axiome du choix, qu'il existe une famille de puissance $> 2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires croissants. A. Appert.

Szpirajn, E.: Remarques sur l'ensemble de Lusin. Mathematica, Cluj 16, 50—52 (1940).

On envisage les quatre propriétés intrinsèques suivantes d'un espace métrique E :
(ν) Chaque sous-ensemble de E qui est non-dense dans E est au plus dénombrable.
(ν_0) Chaque ens. fermé dans E est la somme d'un ens. ouvert dans E et d'un ens. au plus dénombrable.
(ν_1) Chaque ens. F fermé dans E est de la forme $F = G - D_1 + D_2$, où G est ouvert dans E et où D_1 et D_2 sont au plus dénombrables.
(ν_2) Chaque ens. R jouissant de la propriété de Baire dans E est de la forme $R = G - D_1 + D_2$, où G est ouvert dans E et où D_1 et D_2 sont au plus dénombrables. — C. Kuratowski et W. Sierpinski (ce Zbl. 15, 7) ont démontré que, pour qu'un espace métrique séparable E possède la propriété (ν), il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un ensemble linéaire de Lusin. L'auteur démontre les équivalences logiques et implications suivantes: Pour un espace métrique quelconque E on a (ν) $\not\Rightarrow$ (ν_0) \rightarrow (ν_2) \rightarrow (ν_1). Pour

un espace métrique séparable E on a de plus $(v) \rightharpoonup (v_2)$, mais l'implication $(v_1) \rightarrow (v)$ est en défaut pour certains espaces métriques séparables (Kuratowski-Sierpinski, loc. cit. pp. 142 et 138). Pour un espace métrique condensé E on a $(v) \rightharpoonup (v_0) \rightharpoonup (v_1) \rightharpoonup (v_2)$. L'aut. démontre enfin, en utilisant les résultats précédents, l'équivalence deux à deux des trois propositions suivantes: (I) Il existe un ens. indénombrable linéaire de Lusin. (II) Il existe un espace métrique séparable indénombrable E jouissant de la propriété (v_0) . (III) Il existe un espace métrique séparable indénombrable E jouissant de la propriété (v_1) .
A. Appert (Rennes).

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

● Stewart, C. A.: Advanced calculus. London: Methuen and Co., Ltd. 1940. XVIII, 523 S. Sh 25/—.

● Witting, A.: Differentialrechnung. 3., neubearb. Aufl. (Samml. Göschen Bd. 87.) Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1941. 201 S. u. 95 Fig. geb. RM. 1.62.

Die vorliegende Neuauflage ist eine ganz wesentliche Verbesserung des Buches. Die Grundlagen der Differentialrechnung sind jetzt ausreichend berücksichtigt. Im einzelnen ist noch manches zu bessern. Die Existenz der oberen und unteren Grenze einer beschränkten Zahlenfolge und einer beschränkten Funktion wird einfach postuliert. Unklarheiten, Mängel der Darstellung oder Irrtümer finden sich z. B. noch bei der Definition der Intervallschachtelung, der impliziten Funktion, der Definition der Stetigkeit, bei den Funktionen in Parameterdarstellung und der Ausdeutung des Mittelwertsatzes. Indessen beeinträchtigen sie den Wert des reichhaltigen und geschickt geschriebenen Büchleins nicht erheblich.
Krafft (Marburg a. d. L.).

Teichmüller, Oswald: Berichtigung zu der Arbeit: „Genauere Ausführungen über den Begriff des partiellen Differentialquotienten und die Operationen der Vektoranalysis“. [Deutsche Mathematik 5 (1940) S. 64—72.] Dtsch. Math. 6, 281—282 (1941).

Verf. hat in der in dies. Zbl. 22, 322 besprochenen Arbeit eine neue Definition der partiellen Ableitung eingeführt. Unter Berücksichtigung einer Kritik von Max Müller ist zu berichtigen: Die Regel $\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}$ gilt nur unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß f und g in x_0, y_0 stetig sind. Bezüglich der Kettenregel gilt: Es seien $f(x_0, y_0) = u_0, g(x_0, y_0) = v_0, f, g$ in der Umgebung von x_0, y_0 erklärt, in x_0, y_0 stetig und daselbst $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}$ vorhanden; $\varphi(f, g)$ sei in der Umgebung von u_0, v_0 erklärt, seine partiellen Ableitungen vorhanden und aus $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 < \delta^2, (u_2 - u_0)^2 + (v_2 - v_0)^2 < \delta^2$ folge $|\varphi(u_2, v_2) - \varphi(u_1, v_1) - (u_2 - u_1)\varphi_u(u_0, v_0) - (v_2 - v_1)\varphi_v(u_0, v_0)| < \varepsilon \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}$, dann gilt die Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(f(x, y), g(x, y)) = \frac{\partial \varphi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Harald Geppert (Berlin).

Roussel, André: Sur une extension simple de la notion de contact. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 527—528 (1941).

Es wird auf weitere Anwendungsmöglichkeiten früherer Gedanken des Verf. [Sur certaines généralisations des opérations infinitésimales élémentaires. Acta math. 53, 87 bis 130 (1929)] hingewiesen. Das Stetigkeitsmaß der stetigen Funktion $f(x)$ einer reellen Variablen an der Stelle x_0 ist $\omega(h) = \max |f(x) - f(x_0)|$ für $|x - x_0| \leq h$. Verf. sagt, daß $\varphi(x)$ an der Stelle x_0 die Funktion $f(x)$ berührt, wenn $f(x) = \varphi(x) + A\omega(\varepsilon(x - x_0))$ ist, mit beschränktem A und $\varepsilon \rightarrow 0$ für $x \rightarrow x_0$. Es wird der Satz ausgesprochen, daß jede stetige Funktion an jeder Stelle eine berührende Funktion von beschränkter Schwankung besitzt. Der Begriff der Hüllkurve einer einparametrischen Funktionenschar kann in naheliegender Weise entsprechend verallgemeinert werden. Über die Existenz einer solchen soll es einen (auch in der Arbeit nicht genau formulierten) wenig fordernden Satz geben.
G. Hajós (Budapest).

Blumenthal, Otto: La géométrie des polynômes binomiaux. (Liège, 17.—22. VII. 1939.) C. R. Congr. Sci. Math. 69—74 (1939).

L'A. étudie les polynômes d'approximation $P_n(x; \gamma)$ de la série du binome $(1+x)^\gamma$ au point de vue de leurs zéros, leurs extrema, leurs points d'inflexion, et leurs intersections mutuelles quand on fait varier n , grâce au reste de la formule de Taylor écrit sous la forme intégrale et à la formule

$$(D) \quad P'_n(x; \gamma) = \gamma P_{n-1}(x; \gamma - 1).$$

La classification conduit à 12 types de courbes dont voici les propriétés les plus cachées: pour $\gamma < 0$, n impair, la courbe admet un zéro et un point d'inflexion, celui-ci toujours à gauche de celui-là; pour $\gamma > 1$, P_n et P_{n+2} ont un point d'intersection S toujours à gauche non seulement des maxima qui vont en décroissant, mais encore des points d'inflexion, dont les ordonnées elles aussi vont en décroissant; pour $2p+1 < \gamma < 2p+2$ (p entier positif), la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre -1 et 0 , dont l'ordonnée est toujours négative. L'A. termine par des considérations basées sur la relation $\Delta P_n(x; \gamma) = x P_{n-1}(x; \gamma)$ où $\Delta P = P(x; \gamma + 1) - P(x; \gamma)$.

Frédéric Roger (Paris).

Boas jr., R. P., and D. V. Widder: Functions with positive differences. Duke math. J. 7, 496—503 (1940).

Die Verff. beweisen den Satz, daß für eine in (a, b) eindeutige stetige reelle Funktion $f(x)$ mit nirgends negativem k -tem Differenzenquotienten $\Delta_\delta^k(f)$ ($k > 2$) überall in (a, b) $f^{(k-2)}(x)$ existiert sowie stetig und konvex ist. Im Unterschied zu Popoviciu [Mathematica, Cluj 8, 1—85 (1934), s. insb. S. 54—58; dies. Zbl. 9, 59] wird (in der Formulierung sowohl als beim Beweise) der Begriff des Differenzenquotienten nur für den Fall konstanter Differenzen δ benutzt (gemäß Lemma 1 der Arbeit sind aber die Vor. $\Delta_\delta^k(f) \geq 0$ und $\Delta_{\delta_1} \Delta_{\delta_2} \dots \Delta_{\delta_k}(f) \geq 0$, für beliebige $\delta_\nu > 0$, gleichwertig). Den Verff. ist entgangen, daß der Satz schon von E. Hopf (Diss. Berlin 1926) bewiesen wurde.

Haupt (Erlangen).

Allgemeine Reihenlehre:

Stoyanoff, A.: Quelques remarques sur „de Circuli magnitudine inventa“ de Huygens. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 35, 157—166 u. franz. Zusammenfassung 166 (1939) [Bulgarisch].

Verf. bringt eine Verbesserung der Huygensschen Methode zur Berechnung der Zahl π . Die ursprünglich auf geometrischer Grundlage beruhenden beiderseitigen Abschätzungen, die Huygens für die Länge eines Kreisbogens gegeben hat, werden analytisch gefaßt und auf die Form von Reihenentwicklungen gebracht. Entwickelt wird die Funktion $\frac{x}{\sin x}$ nach Potenzen von $u = \sin^2 \frac{x}{2}$. Diese Reihe wird eingeschlossen zwischen Reihenentwicklungen rationaler Funktionen von u , die durch geeignete Auswahl der eingehenden Parameter mit der ursprünglichen Reihe in mehreren Anfangsgliedern in Übereinstimmung gebracht werden und daher gute Annäherungen liefern. Ohne viel Rechnung gewinnt man hieraus π bis auf 5 Dezimalstellen genau, während die Huygenssche Abschätzung nur 3 Stellen liefert.

E. Svenson (Posen).

Hadwiger, H.: Ein Satz über bedingt konvergente Vektorreihen. Math. Z. 47, 663—668 (1942).

Es sei $(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ irgendeine Umordnung einer bedingt konvergenten Reihe von Vektoren α_ν des s -dimensionalen Vektorraumes. Führt man die durch (1) vorgeschriebene Addition geometrisch durch, so entsteht ein unendliches Vektorpolygon α . Ein Häufungspunkt der Menge seiner Eckpunkte heiße ein Endpunkt von α , die Menge aller Endpunkte Endpunktmenge von α . Verf. schlägt die folgende Definition vor: Das Vektorpolygon α heißt konvergent, wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index n so

angeben läßt, daß das Restpolygon $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu}$ ganz innerhalb der ε -Umgebung der Endpunktmenge von α verläuft; besteht die Endpunktmenge aus nur einem Punkt bzw. mehreren Punkten, so heißt das Polygon insbesondere bestimmt bzw. unbestimmt konvergent. Der so definierte Begriff der bestimmten Konvergenz deckt sich mit dem üblichen Konvergenzbegriff. Die unbestimmte Konvergenz bezeichnet ein gewisses ausgezeichnetes infinitesimales Verhalten des nach der üblichen Klassifikation divergenten Polygons. — Die Gesamtheit der Endpunkte aller bestimmt konvergenten Umordnungen von (1) erfüllt nach dem Umordnungssatz von Steinitz einen echten oder unechten, mindestens eindimensionalen linearen Unterraum, der als Steinitzscher Unterraum bezeichnet sei. Es gilt dann, daß eine beschränkte Endpunktmenge eines unbestimmt konvergenten Polygons ein Teilkontinuum des Steinitzschen Unterraumes ist. Den Hauptinhalt der Note bildet nun der Beweis einer Umkehrung davon, nämlich des folgenden Umordnungssatzes: Zu jedem konvexen Teilkontinuum des Steinitzschen Unterraumes von (1) gibt es eine unbestimmt konvergente Umordnung von (1), deren Endpunktmenge mit dem vorgegebenen Kontinuum übereinstimmt. Erwähnt sei der Sonderfall, daß der Steinitzsche Unterraum selbst s -dimensional ist; dann kann man also eine solche Umordnung angeben, daß jeder Punkt des Raumes Endpunkt derselben ist.

Meyer-König (Stuttgart).

Kloosterman, H. D.: On the convergence of series summable (C, r) and on the magnitude of the derivatives of a function of a real variable. J. London Math. Soc. 15, 91—96 (1940).

L. J. Mordell hat in drei Noten [J. London Math. Soc. 3, 86—89, 119—121, 170 bis 172 (1928)] vereinfachte Beweise für Hardy-Littlewoodsche Sätze und Verallgemeinerungen derselben gegeben. Verf. zeigt nun, daß sich die Grundgedanken dieser Beweise in einer Formel zusammenfassen lassen, aus der unmittelbar die Mordellschen und einige weitere Resultate fließen: (I) Für eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ werde $S_n = S_n^{(0)} = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu}$, $S_n^{(r)} = \sum_{\nu=1}^n S_{\nu}^{(r-1)}$ ($r = 1, 2, \dots$) gesetzt. Sind dann h, k, n und r positive ganze Zahlen, $n > rk$, so gilt

$$h^r S_n^{(0)} = \Delta_h^r S_n^{(r)} - \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) \sum_{\mu=0}^{r-1} h^{r-\mu-1} \Delta_h^{\mu} S_{\nu}^{(\mu-1)},$$

$$k^r S_n^{(0)} = \Delta_{-k}^r S_n^{(r)} + \sum_{\nu=n-k+1}^n (\nu-n+k-1) \sum_{\mu=0}^{r-1} k^{r-\mu-1} \Delta_{-k}^{\mu} S_{\nu}^{(\mu-1)}.$$

(Die Differenzen zu den Spannen h und $-k$ beziehen sich auf den unteren Index von S ; $\Delta_h^0 S_{\nu}^{(-1)}$ und $\Delta_{-k}^0 S_{\nu}^{(-1)}$ sind als a_{ν} zu lesen.) — Anwendung: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zum Wert Null (C, r) -summierbar (r ganz, ≥ 1) und ist $a_n > -Kn^{-\lambda}$ für eine positive Konstante K und ein λ aus $-r < \lambda \leq 1$, so gilt $S_n = o\left(n^{\frac{r}{r+1}(1-\lambda)}\right)$. — (II) Entsprechende Resultate erhält man für Funktionen einer stetigen Veränderlichen. Es sei weiterhin $f(x)$ eine in $x > 0$ definierte Funktion, die Ableitungen bis zur $(r+1)$ -ten Ordnung (r ganz, ≥ 1) besitze. Dann gilt für jede Zahl h die Formel

$$\frac{1}{h^r} \Delta_h^r f(x) = f^{(r)}(x) + \frac{1}{2} r h f^{(r+1)}(\xi)$$

mit $x \leq \xi \leq x + rh$, je nachdem $h \geq 0$ ist. — Anwendungen: (a) Bestehen für $x \rightarrow \infty$ die Beziehungen $f(x) = o(x^r)$, $f^{(r+1)}(x) > -Kx^{-\lambda}$ mit einer positiven Konstanten K und

einem λ aus $-r < \lambda \leq 1$, so gilt $f^{(r)}(x) = o\left(x^{\frac{r}{r+1}(1-\lambda)}\right)$. — (b) Genügt $f(x)$ den Ungleichungen $|f(x)| < \varphi(x)$, $|f^{(r+1)}(x)| < \psi(x)$, wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$ abnehmende Funktionen bedeuten, so gilt $|f^{(r)}(x)| < 2r^{\frac{r}{r+1}} \varphi(x)^{\frac{1}{r+1}} \psi(x)^{\frac{r}{r+1}}$. F. Lösch (Rostock).

Obrechhoff, Nikola: Anwendung der Eulerschen Reihentransformation zur Summierung der Dirichletschen Reihen, der Fakultätenreihen und der Newtonschen Reihe. S.-B. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. 1938, 267—300.

Die unendliche Reihe (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt nach dem Verfahren von Euler-Knopp zum Wert s summierbar von der Ordnung $k > 0$, kurz E_k -summierbar, wenn ihre E_k -Transformation (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a'_n$ mit $a'_n = (q+1)^{-n-1} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} a_\nu$, $q = 2^k - 1$ zum Wert s konvergiert; sie heißt von der Ordnung k absolut summierbar, kurz $|E_k|$ -summierbar, wenn (2) absolut konvergiert [K. Knopp, Math. Z. 15, 226—253 (1922) und 18, 125—156 (1923)]. Verf. zeigt, daß dieses Verfahren, dessen Wirksamkeit bei Potenzreihen schon von Knopp untersucht wurde, auch zur Summierung der im Titel genannten Reihen sehr brauchbar ist. — Sei (3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+1)^{-s}$ eine gewöhnliche Dirichletsche Reihe der komplexen Veränderlichen s und E_k -summierbar für $s = s_0$. Dann ist (3) E_k -summierbar für jedes s mit $\Re(s) > \Re(s_0)$ und die E_k -Summe $f(s)$ ist dort regulär analytisch und wird dargestellt durch den Ausdruck

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s-s_0)} \int_0^{\infty} t^{s-s_0-1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n \left(\frac{q+1}{q+e^t} \right)^{n+1} \frac{e^t - 1}{e^t + q} dt,$$

wobei S_n die n -te Teilsumme der E_k -Transformation von (3) an der Stelle $s = s_0$ bedeutet. Demnach gibt es zu jeder Reihe (3) eine Abszisse e_k der E_k -Summierbarkeit derart, daß (3) E_k -summierbar für $\Re(s) > e_k$ und nicht E_k -summierbar für $\Re(s) < e_k$ ist. Je nachdem e_k nicht negativ oder positiv ist, gelten die Formeln

$$(4) \quad e_k = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |A_0 + A_1 + \dots + A_n|}{\log n} \quad \text{oder} \quad (5) \quad e_k = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |A_n + A_{n+1} + \dots|}{\log n}$$

mit $A_n = (q+1)^{-n-1} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} a_\nu$. Ist die Reihe (3) $|E_k|$ -summierbar für $s = s_0$, so ist sie $|E_k|$ -summierbar für $\Re(s) > \Re(s_0)$. Dies gibt Anlaß zur Einführung der Abszissen \bar{e}_k der $|E_k|$ -Summierbarkeit. Je nachdem \bar{e}_k nicht negativ oder positiv ist, gelten die Formeln

$$(6) \quad \bar{e}_k = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log (|A_0| + |A_1| + \dots + |A_n|)}{\log n} \quad \text{oder} \quad (7) \quad \bar{e}_k = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log (|A_n| + |A_{n+1}| + \dots)}{\log n}.$$

Es ist $e_k \leq \bar{e}_k \leq e_k + 1$. — Ganz entsprechende Ergebnisse bekommt Verf. für die Fakultätenreihe (8) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu! a_\nu [s(s+1) \dots (s+\nu)]^{-1}$ ($s \neq 0, -1, \dots$) und für die Newtonsche Reihe (9) $a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu (\nu!)^{-1} a_\nu (s-1)(s-2) \dots (s-\nu)$ ($s \neq 1, 2, \dots$).

Die Formeln (4) bis (7) gelten für beide Reihen unverändert mit derselben Bedeutung von A_n . — Neuerdings hat Verf. [Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math., Livre 1, 36, 1—145 (1940)] das Euler-Knoppsche Verfahren auf Doppelreihen übertragen und damit die den Reihen (3), (8) und (9) entsprechenden Doppelreihen summiert.

Meyer-König (Stuttgart).

Obrechhoff, Nikola: Sommatation par la transformation d'Euler. Les séries de Dirichlet, les séries de facultés et la série de Newton. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 35, 1—148 u. franz. Zusammenfassung 149—156 (1939) [Bulgarisch].

Soweit es der französische Auszug und ein Durchblättern des Haupttextes erkennen lassen, hat die Arbeit im wesentlichen denselben Inhalt wie die im vorhergehenden Referat besprochene Arbeit des Verf. Zusätzlich enthält sie einige neue Darstellungen der E_k -Summen $f(s)$ der behandelten Reihen und der Summierbarkeitsabszissen, ferner die Anwendung des Borelschen Summierungsverfahrens auf die Fakultätenreihe.

Meyer-König (Stuttgart).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Sierpiński, W.: Sur les bases dénombrables des familles de fonctions. Acta Pontif. Acad. Sci. 4, 211—212 (1940).

Une famille quelconque F de fonctions d'une variable réelle est dite admettre une base dénombrable s'il existe une suite infinie de fonctions (n'appartenant pas nécessairement à F) telle que toute fonction de F soit la limite d'une sous-suite de la précédente. L'A. énonce cinq théorèmes dont les démonstrations paraîtront aux Fundamenta Mathematicae. Parmi eux, citons le suivant: S'il existe une base dénombrable pour la famille de toutes les fonctions (de W. H. Young) d'une variable réelle (limites de suites non décroissantes de fonctions semi-continues supérieurement) — et l'A. précise qu'il n'en existe pas qui soit formée de fonctions mesurables —, il existe aussi une base dénombrable pour la famille de toutes les fonctions d'une variable réelle d'une classe α de Baire donnée quelconque ($\alpha < \Omega$). *Frédéric Roger.*

Muzen, Petar: Sur une application du théorème de Mollerup. Mathematica, Cluj 16, 97—101 (1940).

Die Folge $\{\varphi_i(x)\}$ der in $[a, b]$ stetigen Funktionen $\varphi_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) heißt dort eine Basis der stetigen Funktionen, wenn man aus der Gesamtheit der linearen Verbindungen $\sum c_i \varphi_i(x)$ eine Teilfolge herausgreifen kann, die in $[a, b]$ jeder gegebenen stetigen Funktion gleichmäßig zustrebt. Der in der Überschrift genannte Satz von Mollerup [Math. Ann. 66, 511—516 (1909)] lautet: Wenn man mit jeder Folge x_1, \dots, x_n eine lineare Verbindung $f(x)$ der Funktionen $\varphi_i(x)$ bilden kann, so daß $f(x) > 0$ für $x \neq x_k$ und $f(x_k) = 0$ ist, so ist die Folge 1, $\{\varphi_i(x)\}$ eine Basis. — Ein für das weitere wichtiger Begriff ist der Cartesische Folge: diesen Namen führt eine Folge von Funktionen $\varphi_i(x)$, die in $[a, b]$ analytisch sind, wenn die Anzahl der

Nullstellen einer Funktion $\sum_{k=0}^n C_k \varphi_k(x)$ die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge $\{C_i\}$

nicht überschreitet — jede Wurzel nach ihrer Vielfachheit gerechnet. — Des Verf. Hauptsatz ist folgender: Wenn es zwei Cartesische Folgen $\{\varphi_i(x)\}$, $\{\chi_j(x)\}$ gibt, derart, daß sich jedes Produkt $\varphi_k(x) \chi_j(x)$ durch lineare Verbindungen der $\varphi_i(x)$ gleichmäßig annähern läßt, so bildet die Folge 1, $\{\varphi_i(x)\}$ eine Basis. Daraus folgt: Wenn es eine Cartesische Folge $\{\varphi_i(x)\}$ gibt, so daß die Voraussetzung des Hauptsatzes auf alle Produkte $\varphi_k(x) \varphi_j(x)$ ($k \neq j$) zutrifft, so bilden die Funktionen 1, $\{\varphi_i(x)\}$ eine Basis. Dasselbe gilt daher auch für eine Cartesische Folge $\{\varphi_i(x)\}$, wenn jedes Produkt $\varphi_k \varphi_j$ ($k \neq j$) eine lineare Verbindung der Mitglieder von $\{\varphi_i(x)\}$ ist. Als Sonderfall ergibt sich hieraus für $\varphi_k(x) = x^k$ der Weierstraßsche Annäherungssatz. — Mit Hilfe eines Kennzeichens einer Cartesischen Funktionenfolge $\{\varphi_i(x)\}$, das sich auf Wronskische Determinanten der $\varphi_i(x)$ bezieht [Pólya und Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 2, 52—53 (1925)], beweist Verf. schließlich den Satz: Ist $h(x) \geq 0$ und analytisch und $\{t_k\}$ eine Folge positiver Zahlen, dann ist die Folge $\{1, [h(x) + t_k]^{-1}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) eine Basis. Den Sonderfall $h(x) = x$ dieses Satzes bewies Szász [Math. Ann. 104, 155—160 (1930)].

Koschmieder (Graz).

Grünwald, Géza: Über die Hermitesche Interpolation. Mat. fiz. Lap. 48, 272—283 u. dtsh. Zusammenfassung 284 (1941) [Ungarisch].

$(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$, $n = 1, 2, \dots$ sei eine in $(-1, +1)$ liegende Punktgruppenfolge. Das n -te Hermitesche Interpolationspolynom

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) \left\{ 1 - \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} (x - x_k^{(n)}) \right\} \{L_k^{(n)}(x)\}^2 + \sum_{k=1}^n d_k^{(n)} (x - x_k^{(n)}) \{L_k^{(n)}(x)\}^2,$$

$$L_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)}) (x - x_k^{(n)})}; \quad \omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k^{(n)})$$

einer stetigen Funktion $f(x)$ ist das einzige Polynom $(2n - 1)$ -ten Grades, für wel-

ches $H_n(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)})$ und $H'_n(x_k^{(n)}) = d_k^{(n)}$, ($k = 1, 2, \dots, n$) gilt. Verf. beweist, daß $H_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ in $(-1, +1)$ gleichmäßig nach $f(x)$ konvergiert, wenn für alle k und n die Ungleichungen

$$\left| x_k^{(n)} + \frac{\omega'(x_k^{(n)})}{\omega''(x_k^{(n)})} \right| \geq 1 + \varrho > 1, \quad |d_k^{(n)}| < A \text{ (sonst beliebig)}$$

erfüllt sind.

E. Egerváry (Budapest).

Markoff, A.: Functions generated by developing power series in continued fractions. *Duke math. J.* **7**, 85—96 (1940).

Die vorliegende Veröffentlichung ist eine englische Übersetzung einer russisch geschriebenen Arbeit von A. Markoff, welche in den Abh. d. Kais. Akad. d. Wiss. zu St. Petersburg **74**, Nr 2, 1—30 (1894) erschienen ist. — Entwickelt man die Reihe

$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{S_{\nu-1}}{x^{\nu}} (1)$ in einen Kettenbruch, so lassen sich die Koeffizienten der Zähler- und Nennerpolynome der Näherungsbrüche $\frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)}$ des Kettenbruches in ganz bestimmter Weise durch die Koeffizienten von (1) ausdrücken. Über diese Koeffizienten setzt Verf. $\Delta_{\nu} > 0$ und $\Delta_{(\nu)} > 0$; $\nu = 1, 2, \dots, m$ voraus, wobei

$$\Delta_{\nu} = [S_{i+j}]_0^{2\nu-2} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{\nu-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{\nu-1} & S_{\nu} & \dots & S_{2\nu-2} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta_{(\nu)} = [S_{i+j}]_1^{2\nu-1}$$

ist. Von den Polynomen $\psi_m(x)$ zeigt er dann u. a., daß $\psi_m(x)$ lauter voneinander verschiedene positive Wurzeln besitzt, welche mit wachsenden $S_1, S_3, \dots, S_{2m-1}$ und abnehmenden $S_0, S_2, \dots, S_{2m-2}$ zunehmen.

Lammel (Prag).

Leja, F.: Sur une propriété des suites des polynômes homogènes bornées sur une courbe et sur son application. *Ann. Acad. Sci. Techn., Varsovie* **5**, 8—21 (1938).

L'au. étudie la convergence des suites de polynômes $P_n(x, y)$ homogènes, à coefficients et variables réels ou complexes, n est le degré. Il introduit la terminologie suivante: Q est un point de coordonnées (x, y) de l'espace des variables (2 ou 4 dimensions), la distance triangulaire $|QQ_0|$ de Q et Q_0 est $|x_0y - xy_0|$; si D est une demi-droite $x = x_0 + a\lambda$, $y = y_0 + b\lambda$, $\lambda \geq 0$, issue de Q_0 , telle que $|x_0b - y_0a| = 1$, la projection triangulaire q de Q sur D est définie par $|qq_0| = |QQ_0|$, q sur D . Une courbe continue C issue de Q_0 , $x = f(t)$, $y = g(t)$, $0 \leq t \leq 1$, vérifie la condition A si, à chaque $\mu > 0$ correspond un arc $0 \leq t \leq t_0$ tel que $|Q(t)Q(t_0)| > 0$ et que, Q et Q' étant sur cet arc et q et q' leurs projections triangulaires sur une demi-droite issue de Q_0 , on ait $|QQ'| \leq |qq'| (1 - \mu)$. (Cette condition est remplie si C est un segment rectiligne arbitrairement petit porté par une droite ne passant pas par l'origine.) L'au. montre alors que: Si une suite de polynômes P_n est bornée presque partout sur une courbe C issue d'un point Q_0 et remplissant la condition A au voisinage de Q_0 , à tout nombre ε , $0 < \varepsilon < 1$, correspond un voisinage V_{ε} de Q_0 tel que $(1 - \varepsilon)^n P_n(x, y)$, $n = 1, 2, \dots$ tend uniformément vers zéro dans V_{ε} . (Borné presque partout signifie borné en des points de C correspondant à des t n'appartenant pas à un ensemble de mesure nulle.) La démonstration utilise notamment un lemme antérieur de l'au. (Voir ce Zbl. **7**, 62.) L'au. montre que la prop. ne subsiste pas toujours si la courbe C ne vérifie pas la cond. A ; de même il ne suffit pas que la suite P_n converge sur un ensemble dense sur C pour que l'énoncé soit valable. Voici la plus simple des applications données par l'au.: Si la suite des P_n converge presque partout dans la portion F_0 de la frontière F d'un domaine borné D , elle converge uniformément dans chaque domaine fermé intérieur à D . F_0 est la portion de F telle que a) sur toute droite $ax + by = 0$ passant par des points de D se trouve un point et un seul de F_0 ; b) x, y étant un point de F_0 , aucun point de coordonnées $\varrho x, \varrho y$ n'appartient à F si $|\varrho| > 1$,

ρ réel. Un ensemble de points est situé presque partout sur F si par chaque point de D passe au moins un segment rectiligne de D dont le prolongement ne passe pas par l'origine et qui est coupé presque partout par les droites $ax + by = 0$ contenant des points de cet ensemble. G. Valiron (Paris).

Barba, G.: Proprietà gruppali nelle serie di Dirichlet, serie di Dirichlet gruppali. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. **10**, 173—179 (1940).

Verf. knüpft an an zwei Arbeiten von G. Andreoli (dies. Zbl. **15**, 208 und **22**, 127); er spezialisiert dort angegebene Gedankengänge auf Dirichletreihen $\sum a_n \exp(-\lambda_n s)$, $s = \sigma + it$. Damit die aus einer Summierungsmethode und aus dem Produkt zweier solcher Reihen entstehende Reihe wieder eine Reihe desselben Typs sei, ist notwendig, daß die Folge der λ_n die Eigenschaft habe $\lambda_r + \lambda_\rho = \lambda_p$, $p = \varphi(r, \rho)$. Fragen bezüglich des Spektrums unendlicher Matrizen (Heisenberg) führen auf derartige Reihen. Um ihren Typus zu charakterisieren, wird folgendermaßen vorgegangen. Alle Stellen

$M = \sum_1^n r_i l_i$, wo l_i einer der Exponenten λ_n ist, $r_i > 0$ ganzzahlig, gehören zur

Menge $[\lambda_n]$. $l^{(1)}$ sei unter den Zahlen M diejenige mit dem kleinsten absoluten Betrage. Jetzt nehme man von $[\lambda_n]$ die Zahlen $l^{(1)} r^{(1)}$ weg; unter den übrigbleibenden sei $l^{(2)}$ diejenige mit dem kleinsten absoluten Betrag. Man nehme auch die Zahlen $l^{(2)} r^{(2)}$ aus $[\lambda_n]$ weg, sowie alle Zahlen $l^{(1)} r_i^{(1)} + l^{(2)} r_k^{(2)}$, usw. Die Folge $L: l^{(1)}, l^{(2)}, \dots, l^{(v)}, \dots$ wird als die Spur der Menge $[\lambda_n]$ bezeichnet. L und $[\lambda_n]$ bedingen sich gegenseitig. Es werden Folgerungen aus der „Gruppeneigenschaft“ $\lambda_r + \lambda_\rho = \lambda_p$ gezogen, indem die Häufungsstellen der Menge $[\lambda_n]$ betrachtet werden. Schließlich werden die Ergebnisse für die Fälle a) alle λ_n reell, b) $\lambda_n = \xi_n + i\eta_n$ zusammengestellt. Kienast.

Bang, Thøger: Über die Aufspaltung von Fourierreihen fastperiodischer Funktionen. Mat. Tidsskr. B **1941**, 53—58 [Dänisch].

Petersen (Mat. Tidsskr. B **1937**, 86—88; dies. Zbl. **16**, 304) bewies, daß, wenn eine fastperiodische Funktion $f(x)$ ein fastperiodisches Integral 1. Ordnung und eine fastperiodische Ableitung 1. O. besitzt, ihre Fourierreihe durch Null aufgespalten werden kann, d. h. die Glieder mit positiven und ebenso die mit negativen Fourierexponenten für sich je die Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion bilden. Ein weitergehender Satz wurde von J. Favard (Leçons sur les fonctions presque-périodiques S. 159; Paris 1933; dies. Zbl. **7**, 343) angegeben, der die Existenz eines fastperiodischen Integrals 1. O. und einer fastperiodischen Ableitung beliebig kleiner positiver Ordnung voraussetzte. Verf. schwächt diese Voraussetzung dahin ab, daß ein Integral und ebenso eine Ableitung beliebig kleiner positiver Ordnung von $f(x)$ fastperiodisch sein sollen, oder anders ausgedrückt, daß $f(x)$ einer Lipschitzbedingung genügen und für

alle $\gamma \int_{\gamma}^{T+\gamma} f(x) dx = O(T^{1-\epsilon})$ sein soll. Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf die

Tatsache, daß jede fastperiodische Funktion $f(x)$ bei beliebig vorgegebenem $d > 0$ in die Summe zweier fastperiodischer Funktionen aufgespalten werden kann, deren eine lauter absolut unter $2d$ gelegene, deren andere nur absolut oberhalb d gelegene Fourierexponenten besitzt. Harald Geppert (Berlin).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Hamel, Georg: Direkte Ableitung der Stirlingschen Formel aus dem Eulerschen Integral. Dtsch. Math. **6**, 277—281 (1941).

Für Vorlesungszwecke leitet Verf. aus der Integraldefinition der Γ -Funktion:

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z^\tau e^{-z} G(z)$ die asymptotische Entwicklung her

$$G(z) = \int_0^\infty e^{-(\tau-1-\ln \tau)z} \frac{d\tau}{\tau} \sim \sqrt{2\pi} \left\{ z^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} z^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{288} z^{-\frac{5}{2}} + \dots \right\};$$

sie entsteht durch Einführung der Integrationsvariablen $\tau = 1 - \ln \tau$ und Entwicklung unter dem Integralzeichen und gestattet durch elementare geometrische Kurvenbetrachtungen abzulesen, daß der Fehler in $G(z)$ bei Abbrechen nach dem ersten Glied (was der einfachen Stirlingschen Formel entspricht) unterhalb $\Re(z)^{-1}$ liegt.

Harald Geppert (Berlin).

Argence, E.: Sur une dégénérescence des fonctions d'Appell. C. R. Acad. Sci., Paris 213, 817—820 (1941).

Die Arbeit knüpft an eine früher besprochene von N. Botea (dies. Zbl. 5, 159) an. Darnach lassen sich die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1) \quad \Delta_n U \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_n} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{vmatrix} U = 0$$

durch die Appellschen Funktionen ausdrücken. Nimmt man statt (1) die mit der ersten Zeile $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}, 0, \dots, 0$ gebildete n -reihige Zirkulante $\Delta_{n,p} U = 0$, so sind Lösungen dieser Gleichung die folgenden

$$U_i = \exp(-\lambda_2 - \lambda_3 - \cdots - \lambda_p) x_1 \cdot \bar{\omega}_i(\lambda_2 x_2, \dots, \lambda_p x_p),$$

worin die $\bar{\omega}_i$ ausgeartete Appellsche Funktionen bezeichnen:

$$\bar{\omega}_i(x_2, \dots, x_p) \equiv \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} j_i^\nu \exp\left(\sum_{\mu=1}^{p-1} j_\nu^\mu x_{\mu+1}\right),$$

mit $j_0=1, j_1, \dots, j_{n-1}$ als n -ten Einheitswurzeln. Als Sonderfälle ergeben sich Lösungen der Gleichungen

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta U = 0, \quad \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0.$$

Harald Geppert (Berlin).

Andersson, W.: The binomial type of Gram's series. Skand. Aktuarie Tidskr. 24, 203—213 (1941).

Bezeichnet man die Funktion $\pi(x)$ als die typische Funktion (Type Function) einer Klasse von Reihen (G -Reihen) nach orthogonalen Polynomen $\Phi_\nu(x)$

mit der Orthogonalitätsrelation $\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \pi(x) \Phi_\nu(x) \Phi_\mu(x) = 0$, $\nu \neq \mu$, und normiert man

$\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \pi(x) \Phi_\mu^2(x) = H_\mu$, $H_0 = 1$, so kann man nach den zur typischen Funktion

$$\pi(x) \equiv b(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad p+q=1; \quad b(x) \equiv 0, \quad x < 0 \quad \text{und} \quad x > n,$$

gehörenden Polynomen $\Phi_\nu(x)$ fragen; es ergibt sich

$$b(x) \Phi_\nu(x) = (-1)^\nu q^\nu \Delta^\nu [b(x) x^{(\nu)}], \quad x^{(\nu)} = x(x-1)(x-2) \dots (x-\nu+1);$$

man erhält ferner: $H_\nu = \nu! p^\nu q^\nu n^{(\nu)}$. Die Koeffizienten γ_ν in der Reihenentwicklung

$$f(x) = b(x) \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \Phi_\nu(x) \right]$$

lassen sich in einfacher Weise durch die faktoriellen Momente ausdrücken. Durch geeignete Wahl der Parameter n, p läßt sich in bekannter Weise das Verschwinden von γ_1 und γ_2 erzielen. Von einer Reihe von bemerkenswerten Formeln — Analogien zu bekannten Formeln bei anderen orthogonalen Polynomsystemen — sollen zwei besonders erwähnt werden:

$$\Phi_{\nu+2}(x) = [x - np - (\nu+1)(q-p)] \Phi_{\nu+1}(x) - (\nu+1)(n-\nu)pq \Phi_\nu(x), \\ p(n-x-1) \Delta^2 \Phi_\nu(x) - (x-np-\nu+1) \Delta \Phi_\nu(x) + \nu \Phi_\nu(x) = 0.$$

Gezeigt wird schließlich, daß die Polynome eine Sturmsche Kette bilden. Die Zusammenhänge mit den Polynomen von Hermite und von Charlier-Jordan [vgl. Jordan, Sur la probabilité des épreuves répétées; Bull. Soc. Math. France **54**, 101 bis 137 (1926)] werden angedeutet. F. Knoll (Wien).

Feldheim, Ervin: Contributions à la théorie des polynômes de Jacobi. Mat. fiz. Lap. **48**, 453—502 u. franz. Zusammenfassung 503—504 (1941) [Ungarisch].

Für die Polynome von Jacobi, definiert in der Form

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} F\left(n + \alpha + \beta + 1, -n; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}\right), \quad (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

wo $F(a, b; c; x)$ die bekannte hypergeometrische Funktion bedeutet, werden die beiden erzeugenden Funktionen

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta + 1)_n}{(\alpha + 1)_n} t^n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= (1-t)^{-\alpha-\beta-1} F\left(\frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2}; \alpha + 1; -\frac{2t(1-x)}{(1-t)^2}\right) \\ &= (1-t)^{\beta-\alpha} (1-2xt+t^2)^{-\beta-\frac{1}{2}} F\left(\frac{\alpha - \beta + 1}{2}, \frac{\alpha - \beta}{2}; \alpha + 1; -\frac{2t(1-x)}{(1-t)^2}\right) \end{aligned}$$

hergeleitet. Unter Verwendung anderer Ergebnisse des gleichen Verf. wird eine weitere erzeugende Funktion in der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) t^n = (1-t)^{\beta} \left(1 - t \frac{1+x}{2}\right)^{-\alpha-\beta-1}$$

gefunden. Setzt man ${}_1F_1(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} x^n$ für die konfluente hypergeometrische Funktion, so gelangt man zu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(\alpha+1)_n} P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) = e^{\frac{t(1+x)}{2}} {}_1F_1\left(-\beta; \alpha+1; t \frac{1-x}{2}\right).$$

Die Ergebnisse werden nach den verschiedensten Richtungen spezialisiert, z. B. für $P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + \frac{1}{2})_n} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x)$. Als eine erzeugende Funktion der Produkte wird gefunden

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! (\alpha + \beta + 1)_n}{(\alpha + 1)_n (\beta + 1)_n} z^n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(y) &= \\ = (1+z)^{-\alpha-\beta-1} F_4\left(\frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2} + 1; \alpha + 1, \beta + 1; \frac{z(1-x)(1-y)}{(1+z)^2}, \frac{z(1+x)(1+y)}{(1+z)^2}\right), \end{aligned}$$

wo $F_4(a, b; c, c'; x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s} (b)_{r+s}}{(c)_r (c')_s r! s!} x^r y^s$ ist. Nach längerem Rechengang

wird die erzeugende Funktion

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(\alpha+1)_n} z^n P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) P_n^{(\alpha, \gamma-n)}(x) &= \\ = \left(1 - z \frac{1+x}{2}\right)^{\gamma} \left(1 - z \frac{1+y}{2}\right)^{\beta} \left(1 - z \frac{1+x}{2} \cdot \frac{1+y}{2}\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-1} \\ F\left(-\beta, -\gamma; \alpha+1; \frac{z \cdot \frac{1-x}{2} \cdot \frac{1-y}{2}}{\left(1 - z \frac{1+x}{2}\right) \left(1 - z \frac{1+y}{2}\right)}\right) \end{aligned}$$

ermittelt. Ein bemerkenswerter Multiplikationssatz wird in der Form

$$P_n^{(\alpha, \beta)}[1 - \mu(1-x)] = \sum_{r=0}^n \binom{n+\alpha}{r} (1-\mu)^r \mu^{n-r} P_{n-r}^{(\alpha, \beta+r)}(x)$$

gefunden. Mit Hilfe der Funktion

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c)_n}{(d)_n (e)_n n!} x^n$$

lassen sich weitere Multiplikationssätze aussprechen; durch Spezialisierung wird eine große Anzahl weiterer Sätze aus diesen Formeln hergeleitet. Geht man von der Integraldarstellung von $F(a, b; c; x)$ aus, so gewinnt man die Formeln

$$P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+1) \Gamma(-\beta)} \int_0^1 u^{\alpha+\beta} (1-u)^{-\beta-1} \left(1-u \frac{1-x}{2}\right) du,$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\gamma+1) \Gamma(\alpha-\gamma)} \int_0^1 v^\gamma (1-v)^{\alpha-\gamma-1} P_n^{(\gamma, \alpha+\beta-\gamma)}[1-v(1-x)] dv.$$

Weitere Integraldarstellungen müssen in der Arbeit eingesehen werden. Von den Sätzen, die die Zusammenhänge mit den Hermiteschen und den Laguerreschen Polynomen klären, seien die folgenden besonders hervorgehoben

$$\Gamma(n+\alpha+\beta+1) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \int_0^\infty u^{n+\alpha+\beta} e^{-u} L_n^{(\alpha)}\left(u \frac{1-x}{2}\right) du,$$

$$2\pi i L_n^{(\alpha)}(x) = \Gamma(n+\alpha+\beta) \int_C e^u u^{-n-\alpha-\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}\left(1-\frac{2x}{u}\right) du;$$

$$n! \Gamma(\lambda) P_n^{(\lambda)}(x) = 2 \int_0^\infty e^{-u} u^{n+2\lambda-1} H_n(ux) du.$$

(Der Verlauf der Kurve C ist in der Arbeit ersichtlich.) — In den die Arbeit beschließenden Verallgemeinerungen werden zunächst weitere Zusammenhänge mit den hypergeometrischen Funktionen erschlossen und schließlich eine Reihe von Sätzen über Jacobische Polynome in mehreren Veränderlichen

$$P_{m,n}^{(\alpha, \beta)}(x, y) = \frac{(\alpha+1)_{m+n}}{m! n!} F_1\left(m+n+\alpha+\beta+1, -m, -n; \alpha+1; \frac{1-x}{2}, \frac{1-y}{2}\right),$$

$$F_1(a, b, b'; c; x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s} (b)_r (b')_s}{(c)_{r+s} r! s!} x^r y^s,$$

hergeleitet und unter anderem auch die partiellen Differentialgleichungen, denen sie genügen, ermittelt.

F. Knoll (Wien).

Rutgers, J. G.: Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de Bessel. 5. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 978—988 (1941).

Zunächst werden aus früher abgeleiteten Formeln (zu den vorangehenden Mitt. vgl. dies. Zbl. 25, 42, 161, 402) weitere spezielle gewonnen. Dann folgt die Ableitung der Formeln

$$2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (s+1) J_{\nu+s+1}(x) J_{\nu+s+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x J_\nu(\alpha) J_{\nu-\frac{1}{2}}(\alpha) \sin 2(x-\alpha) \sqrt{\alpha} d\alpha, \quad \Re(\nu) > -\frac{1}{2},$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (2s+1) J_{\nu+s+\frac{1}{2}}(x) J_{\nu+s}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x J_\nu(\alpha) J_{\nu-\frac{1}{2}}(\alpha) \cos 2(x-\alpha) \sqrt{\alpha} d\alpha, \quad \Re(\nu) > -\frac{1}{2},$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} J_{\nu+s+\frac{1}{2}}(x) J_{\nu+s}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x J_\nu(\alpha) J_{\nu-\frac{1}{2}}(\alpha) \sqrt{\alpha} d\alpha, \quad \Re(\nu) > -\frac{1}{2},$$

woraus durch zweckmäßige Kombination weitere vier sich ergeben. Die Parameterwerte $\nu = 0, \frac{1}{2}, 1$ führen auf eine Menge spezieller Beziehungen, die zu weiteren Kom-

binationen Veranlassung geben. So ergeben sich z. B. die bemerkenswerten Beziehungen:

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s J_{s+\frac{1}{2}}(x) (\sin(2x) J_s(x) - \cos(2x) J_{s+1}(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x J_0(\alpha) \sin 3\alpha d\alpha,$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s J_{s+\frac{1}{2}}(x) (\cos(2x) J_s(x) + \sin(2x) J_{s+1}(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \int_0^x J_0(\alpha) \cos 3\alpha d\alpha.$$

Rutgers, J. G.: Sur des séries et des intégrales définies contenant les fonctions de Bessel. 6. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 1092—1098 (1941).

Aus Formeln der früheren Mitteilungen (dies. Zbl. 25, 42, 161, 402) wird die Beziehung gewonnen:

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x J_{\mu-\varrho-\frac{1}{2}}(x-\alpha) J_{\mu-\varrho-1}(x-\alpha) J_{2\varrho}(2\alpha) \alpha \sqrt{x-\alpha} d\alpha, \quad \Re(\mu) > \Re(\varrho) > -\frac{1}{2},$$

woraus für $\nu = 0$, $\frac{1}{2}$ und $\varrho = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ weitere Formeln abgeleitet werden. Aus der bekannten Darstellung von $x^{\nu+\varrho}$ durch eine unendliche Reihe, die nach Produkten von $J_{\nu+n}(x) J_{\varrho+n}(x)$ fortschreitet, ergibt sich die weitere Formel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\mu-2\varrho+2n-\frac{3}{2}}{2\mu-2\varrho+n-\frac{3}{2}} \binom{2\mu-2\varrho+n-\frac{3}{2}}{n} J_{\mu+n}(x) J_{\mu+n-\frac{1}{2}}(x) \\ = \frac{2\varrho+1}{\Gamma(2\mu-2\varrho)\sqrt{2\pi x}} \int_0^x J_{2\varrho+1}(2\alpha) (x-\alpha)^{2\mu-2\varrho-1} \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad \Re(\mu) > \Re(\varrho) > -\frac{1}{2},$$

die auf Integraldarstellungen für $\sum_{n=0}^{\infty} J_{\varrho+n+\frac{1}{2}}(x) J_{\varrho+n+\frac{1}{2}}(x)$ und $\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s J_{2s+\frac{1}{2}}(x) J_{2s}(x)$ führt, welche bei besonderen Werten der Parameter nach früher abgeleiteten Formeln besonders einfache Resultate ergeben. Volk (Würzburg).

Agostinelli, Cataldo: Sopra alcuni integrali delle funzioni cilindriche. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 4, 25—28 (1941).

Die in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 20, 322) vom Verf. aufgestellte Formel über Besselsche Funktionen J_n

$$\int_0^{\infty} J_n(sx) J_n(sy) s ds \int_0^{\infty} J_0(s\sigma) f(\sigma) \sigma d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}) \cdot \cos n\theta d\theta$$

wird unter Annahme von speziellen Funktionen $f(\sigma)$ zur Herleitung von einigen weiteren Formeln angewendet. O. Borůvka (Brünn).

Straubel, Rudolf: Unbestimmte Integrale mit Produkten von Zylinderfunktionen. (1. Mitt.) Ing.-Arch. 12, 325—336 (1941).

In dieser Arbeit werden Beziehungen zwischen unbestimmten Integralen mit Produkten von zwei Zylinderfunktionen abgeleitet, die es ermöglichen, Integrale auf andere zurückzuführen. Dabei wird die Untersuchung auf Beziehungen zwischen zwei Integralen von linearem Zusammenhang und gleichem Argument beschränkt. An Stelle einer oder beider Zylinderfunktionen stehen in einem Teil der Integrale die Ableitungen der Zylinderfunktionen nach ihrem Argument, da Beziehungen mit solchen Integralen in vielen Fällen besonders einfache Formen annehmen. — In einer späteren Arbeit sollen Integrale mit Produkten von Zylinderfunktionen proportionaler (statt gleicher) Argumente untersucht werden. Gran Olsson (Trondheim).

Feldheim, E.: Alcuni risultati sulle funzioni di Whittaker e del cilindro parabolico. Atti Accad. Sci. Torino 76, 541—555 (1941).

Verf. liefert, z. T. ohne Beweis, Beiträge zur Lehre von den Weberschen Funk-

tionen $D_\nu(z)$ des parabolischen Zylinders, die für ganze $\nu = n \geq 0$ nach Vervielfachung mit $2^{\frac{1}{2}n} \exp(\frac{1}{4}z^2)$ in die Hermite'schen Polynome (H. P.) $H_n(z/\sqrt{2})$ übergehen. D_ν , ein Sonderfall der Whittakerschen Funktionen und daher durch zwei Kummer'sche konfluente hypergeometrische Funktionen ${}_1F_1$ ausdrückbar, hängt mit ${}_1F_1$ auch durch einen Grenzübergang zusammen: Verf. zeigt, daß bei beliebigem k

$$(1) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\omega^2 + k + 1 + \nu)}{\omega^\nu \Gamma(\omega^2 + k + 1)} {}_1F_1(-\nu; \omega^2 + k + 1; \omega^2 - \omega x) = \exp(\frac{1}{4}x^2) D_\nu(x)$$

ist. Aus (1) gewinnt er die (schon bekannte) Entwicklung eines Produktes zweier D -Funktionen nach einzelnen D -Funktionen und umgekehrt, ferner den Summensatz der $D_\nu(z)$. Das (bekannte) Umrißintegral für $D_\nu(z)$ führt ihn zu einer Integraldarstellung der Potenz, aus der sich deren (bekannte) Entwicklung nach den H. P. ergibt. Hat eine von zwei D -Funktionen einen nichtnegativen ganzen Zeiger, so erhält Verf. für den Malwert beider unter der Annahme $\Re \mu > -1$ und bei willkürlichen u, v die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} D_n(x-v) D_{n+\mu}(x+v) dx = n! (v+iu)^\mu \exp[-\frac{1}{4}(u^2+v^2)] L_n^{(\mu)}(u^2+v^2),$$

wo $L_n^{(\mu)}$ das allgemeine Laguerresche Polynom (L. P.) bedeutet, und ihre Umkehrung — Ausdehnung eines seiner früheren Ergebnisse (vgl. dies. Zbl. 23, 31; III.), in dem auch $\mu \geq 0$ ganz war. — Dann verallgemeinert er die Mehlersche Formel zu der folgenden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D_n(x) D_{n+\mu}(y) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}(\mu+1)} \exp\left[-\frac{(x-ty)^2}{4(1-t^2)}\right] D_\mu\left(\frac{y-tx}{\sqrt{1-t^2}}\right), \quad |t| < 1.$$

Weiter ergänzt er ein früheres, die Hankelsche Abbildung der Whittakerschen Funktion betreffendes Ergebnis (vgl. dies. Zbl. 25, 318f.): Dadurch gelangt er nach dem eingangs Gesagten zum Hankelschen Bilde einer mit einer Potenz und Exponentiellen vervielfachten D -Funktion; ist diese im besonderen ein H. P., so ist das Bild im wesentlichen ein L. P. — Verf. schließt mit der Integralbeziehung

$$\int_0^\infty J_1(xy) D_\nu^2(y) dy = x^{-1} [D_\nu^2(0) - D_\nu(x) D_\nu(-x)].$$

Koschmieder (Graz).

Funktionentheorie:

Cinquini, Silvio: Una osservazione sopra le successioni di funzioni convergenti verso una funzione olomorfa. Boll. Un. Mat. Ital., II. s. 4, 29—31 (1941).

Verf. hat in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 7, 21) einige Sätze aufgestellt, die die Holomorphie der Grenzfunktion einer Funktionenfolge, für die weder die Voraussetzung der gleichmäßigen Beschränktheit noch der Holomorphie gemacht wurde, sichern. Nachstehend der verallgemeinerte Satz, den Verf. in vorliegender Arbeit erhält: Es sei D ein offenes, einfach zusammenhängendes Gebiet der Ebene (x, y) , und es seien $u_n(x, y)$, $v_n(x, y)$, $n = 1, 2, \dots$, zwei Folgen in D absolut stetiger Funktionen, die in jeder abgeschlossenen Menge E von D für $n \rightarrow \infty$ gegen zwei Funktionen $U(x, y)$, $V(x, y)$ gleichmäßig konvergieren. Außerdem entsprechen jeder eben genannten Menge E eine Zahl A und eine für $t \geq 0$ definierte, stetige, nicht negative, derartige Funktion $\Phi(t)$, daß für $t \rightarrow +\infty$ $\Phi(t)/t \rightarrow +\infty$ gilt und sich für alle n

$$\iint_E \left\{ \Phi\left(\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|\right) + \Phi\left(\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|\right) \right\} dx dy \leq A, \quad \iint_E \left\{ \Phi\left(\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right|\right) + \Phi\left(\left|\frac{\partial v_n}{\partial y}\right|\right) \right\} dx dy \leq A,$$

ergibt. Wenn nun für $n \rightarrow +\infty$ fast überall in D

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\partial v_n}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \rightarrow 0$$

gilt, dann ist die Grenzfunktion $U(x, y) + iV(x, y) \equiv f(z)$, ($z = x + iy$) in D holomorph.

L. Cesari (Pisa).

Miranda, Carlo: Su talune serie di funzioni olomorfe. Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 2, 829—836 (1941).

$\{f_n(z)\}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) sei eine Folge von Funktionen, welche in $|z| < R$ regulär sind. Ferner sei $f_n(z) = z^n \varphi_n(z)$, wobei $\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z^k$ ($a_{n0} \neq 0$) ist. Verf. behandelt die Frage, wann sich eine in $|z| < R$ reguläre Funktion $f(z)$ in eine Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(z)$ (1) entwickeln läßt. Ist $H_n(\varrho) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_n(\varrho e^{i\theta})}{a_{n0}} \right|^2 d\theta \right]^{1/2}$ und $H(\varrho) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} H_n(\varrho)$, ferner $r = \overline{\lim}_{0 \leq \varrho < R} \frac{\varrho}{H(\varrho)}$, so konvergiert (1) auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $|z| < r$ gleichmäßig. Hieraus ergibt sich, daß (1) auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $|z| < R$ gleichmäßig konvergiert, wenn $H(\varrho) = 1$ (2) ist. Für das Bestehen von (2) ist notwendig und hinreichend, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! f_n(z)}{z^n f_n'(0)} = 1$ gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $|z| < R$ gilt. Als Beispiel betrachtet Verf. den Fall, daß die Funktionen $f_n(z)$ die Besselschen Funktionen erster Art von der Ordnung n sind. Schließlich gibt Verf. ein Analogon zum Spezialfall (2) für einfach zusammenhängende Bereiche.

Lammel (Prag).

Fichera, Gaetano: Generalizzazione del teorema d'Abel sulle serie di potenze. Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 2, 810—820 (1941).

Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (1) für einen Wert $z' \neq z_0$, so konvergiert sie bekanntlich auch auf der Strecke $|z - z_0| \leq |z' - z_0|$, $\arg(z - z_0) = \arg(z' - z_0)$, und zwar gleichmäßig. Setzt man $z - z_0 = \varrho e^{i\theta}$, so erhält (1) die Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \varrho^n$ (2). Ist also (2) für $\varrho = R$, $\theta = \theta_0$ konvergent, so konvergiert (2) auf $0 \leq \varrho \leq R$, $\theta = \theta_0$ gleichmäßig. Picone (Appunti di Analisi Superiore. Napoli 1940, 271—272; dies. Zbl.

24, 23) hat diesen Satz sinngemäß auf Reihen von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n(P) \frac{1}{\varrho^{n+\mu}} + \gamma_n(P) \varrho^n \right]$ ausgedehnt, worin $c_n(P)$ und $\gamma_n(P)$ auf einer Punktmenge A definierte Funktionen sind und μ eine beliebige reelle Zahl bedeutet. Verf. verallgemeinert nun das Ergebnis von Picone dadurch, daß er Reihen von der Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^m c_i^{(n)}(P) \frac{1}{\varrho^{n+\mu_i}} + \sum_{j=1}^l \gamma_j^{(n)}(P) \varrho^{n+\nu_j} \right]$ betrachtet, worin $c_i^{(n)}(P)$ und $\gamma_j^{(n)}(P)$ auf einer Punktmenge A definierte Funktionen und μ_i und ν_j beliebige reelle Konstante sind.

Lammel (Prag).

Ríos, Sixto: Überkonvergenzprobleme. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid 33, 27—87 (1936) [Spanisch].

L'auteur démontre des propositions, énoncées dans des Notes antérieures (voir ce Zbl. 10, 204; 12, 351, 404) concernant l'ultraconvergence des intégrales de Laplace-Stieltjes $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} d\alpha(\lambda)$. Il généralise les théorèmes de Ostrowski (S.-B. preuß.

Akad. Wiss. 1921, 557—565), W. Bernstein (voir ce Zbl. 8, 115) et Bourion (ce Zbl. 8, 61). Voici un résumé des quatre chapitres. I. Rappel de résultats de Widder sur les abscisses de convergence (Trans. Amer. Math. Soc. 31); établissement d'une formule (compliquée) donnant l'abscisse d'holomorphie; détermination d'une borne de l'intégrale $\int_x^{\infty} e^{-\lambda s} d\alpha(\lambda)$ dans un domaine complètement intérieur à un domaine d'holo-

morphie de $f(s)$. Exemples de cas d'ultraconvergence de $I(s, \lambda') = \int_0^{\lambda'} e^{-\lambda s} d\alpha(\lambda)$.

Conditions suffisantes pour l'ultraconvergence, notamment: si $d\alpha(\lambda) = 0$ pour $\lambda_{2n-1} \leq \lambda < \lambda_{2n}$ avec $\lambda_{2n} > \lambda_{2n-1}\theta$, $\theta > 1$, il y a convergence uniforme de la suite $I(s, \lambda_{2n+1})$ dans un voisinage de tout point d'holomorphie de la droite limitant le demi-plan de convergence de $f(s)$. II. Théor. relatifs aux séries de Dirichlet $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \log(\gamma + \beta n - \lambda_n) \right] = -\infty$, γ et β étant réels positifs. Détermination d'une classe d'intégrales LS pour lesquelles l'ultraconvergence lacunaire est seule possible. III. Étude des domaines d'ultraconvergence des intégrales LS . Représentation d'une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe ne contenant pas le point à l'infini et admettant deux points frontières au moins par une série de polynômes exponentiels à exposants rationnels. Formation d'une série de Dirichlet dont une suite de sommes partielles converge uniformément dans tout domaine intérieur à un domaine de l'espèce précédente. Recherche des conditions que doit vérifier un ensemble de nombres pour que à tout domaine simplement connexe corresponde une série de Dirichlet dont les exposants appartiennent à cet ensemble et dont le domaine soit domaine d'existence et d'ultraconvergence de la somme. IV. Caractérisation des domaines d'ultraconvergence au moyen des propriétés des ensembles dérivés de l'ensemble des zéros des suites convergentes correspondantes. *G. Valiron.*

Ríos, Sixto: Analytische Fortsetzung von Funktionen, die durch Dirichletsche Reihen definiert sind. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid 35, 135—147 (1941) [Spanisch].

L'au. expose, sans démonstrations, des résultats déjà donnés, pour la plupart, dans d'autres publications. Il distingue trois sortes de méthodes de prolongement analytique des séries de Dirichlet: re-ordination, ultraconvergence, recomposition. Il donne un exemple d'application de la première méthode (qui consiste à modifier l'ordre des termes) et indique des propriétés des séries altérées [voir le mémoire plus détaillé des Atti Accad. Italia, VII. s. 2, 677—683 (1941); ce Zbl. 25, 165]. Il rappelle les résultats de W. Bernstein sur l'ultraconvergence (voir ce Zbl. 8, 115) et ce qu'il y a ajouté (voir ce Zbl. 24, 397). Il montre enfin, sur un exemple $\sum (-1)^n n^{-s}$, ce qu'il entend par recomposition (décomposition des coefficients, puis regroupement convenable), mais il n'indique dans ce cas aucune méthode générale. *G. Valiron.*

Reutter, Fritz: Die Werteverteilung ganzer rationaler Funktionen. Jber. Dtsch. Math.-Vereinig. 51, Abt. 1, 258—282 (1941).

Die Funktionentheorie enthält eine reiche Literatur über die Fragen der Werteverteilung bei ganzen und bei meromorphen Funktionen. Bei einer Beschränkung solcher Fragen auf die ganzen rationalen Funktionen wird man viel weitergehende Ergebnisse erhalten. Verf. gewinnt die folgende Lösung: Die n Punkte der Ebene, an denen eine ganze rationale Funktion n -ten Grades einen vorgegebenen Wert $z = a$ annimmt, bestimmen ein vollständiges n -Eck, dem in seinen $\frac{n(n-1)}{2}$ Seitenmitten eine algebraische Kurve $(n-1)$ -ter Klasse einbeschrieben ist. Durchläuft a alle möglichen komplexen Werte, so entstehen ∞^2 n -Ecke. Ihnen sind ∞^1 konfokale algebraische Kurven $(n-1)$ -ter Klasse in den Seitenmitten einbeschrieben. Die $n-1$ reellen Brennpunkte der konfokalen Kurven entsprechen den endlichen Verzweigungspunkten der zugehörigen Riemannschen Fläche. Dieser Satz führt einerseits auf interessante Anwendungen bei Funktionen niederen Grades, andererseits wird versucht, ihn auf allgemeinere Funktionenklassen zu erweitern. Auch wird der geometrische Zusammenhang zwischen den Nullstellen ganzer rationaler Funktionen und denen ihrer Kovarianten behandelt. *Haenzel (Karlsruhe).*

Mäder, Oskar: Über das asymptotische Verhalten meromorpher Funktionen bei speziell gegebener Null- und Polstellenverteilung. Freiburg (Schweiz): Diss. 1942. 28 S.

L'au. complète certains résultats relatifs à l'étude asymptotique du logarithme

d'une fonction méromorphe, quotient de deux produits canoniques, d'ordre fini non entier, dont les zéros et les pôles sont alignés sur l'axe réel négatif. Il suppose que $n(r)$ étant la différence entre le nombre $n_0(r)$ des zéros et le nombre $n_\infty(r)$ des pôles de module moindre que r , on a $n(r) \sim Dr^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ étant un ordre précisé tendant vers l'ordre ρ de la fonction $f(z)$ considérée (comparer Valiron, *Lectures on the general theory of integral functions*, Cambridge 1923; W. Bern: ein, ce Zbl. 8, 115; Pfluger, ce Zbl. 21, 238). Dans un angle $|\varphi = \arg z| < \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, on a la même formule que pour les fonctions entières. L'a. étudie ce que devient cette formule asymptotique lorsqu'on se place dans le voisinage de l'axe réel négatif; il montre que, si $n(r) = Dr^{\rho} + o(r^{\rho}/\log r)$ on a encore $\log |f(re^{i\varphi})| \sim \pi D \cos(\rho\varphi) \frac{r^{\rho}}{\sin \pi \rho}$ à l'extérieur de cercles ayant pour centres les zéros et les pôles $-r_n$ et pour rayon $r_n^{-\sigma}$, $\sigma > 0$. Suivant une méthode de Pfluger (mém. cité), il donne des résultats relatifs au cas où pôles et zéros sont dans un angle d'ouverture inférieure à π . G. Valiron (Paris).

Teichmüller, Oswald: Skizze einer Begründung der algebraischen Funktionentheorie durch Uniformisierung. Dtsch. Math. 6, 257—265 (1941).

Jede geschlossene Riemannsche Fläche \mathfrak{F} besitzt eine universelle Überlagerungsfläche, die sich eindeutig und konform auf die η -Kugel, die η -Ebene oder den Einheitskreis $|\eta| < 1$ abbilden läßt. In diesen hat man dann eine Gruppe \mathfrak{G} von linearen Abbildungen S , und zwei η -Punkten entspricht nur dann derselbe Punkt der Fläche, wenn $\eta_1 = S\eta_2$ ist. Von dieser Darstellung der Fläche \mathfrak{F} ausgehend, können nun alle Grundtatsachen der algebraischen Funktionentheorie sehr einfach bewiesen werden. Man bildet die Poincarésche Reihe

$$(1) \quad W(\eta, \zeta) d\zeta^2 = \sum_S \frac{(dS\zeta)^2}{\eta - S\zeta}.$$

Sie stellt ein „quadratisches Differential“ der Fläche \mathfrak{F} dar mit einem Pol 1. Ordnung an der Stelle η . Der Quotient von zwei solchen quadratischen Differentialen ist eine meromorphe Funktion auf \mathfrak{F} , die als unabhängige Veränderliche des zu \mathfrak{F} gehörigen algebraischen Funktionenkörpers gewählt werden kann. Durch Differentiation nach η kann man aus (1) quadratische Differentiale mit vorgegebenen Hauptteilen bilden. Nun kann die Anzahl der linear unabhängigen quadratischen Differentiale mit vorgegebenen Polen abgezählt werden. Auf Grund dieser und ähnlicher Abzählungen wird schließlich der Riemann-Rochsche Satz bewiesen, aus dem dann weiter in bekannter Weise die Existenz der Elementarintegrale 2. und 3. Gattung folgt. Nebenbei ergibt sich, daß es zu gegebenen Hauptteilen genau dann ein reziprokes Differential gibt, wenn das Produkt dieser Hauptteile mit jedem überall endlichen quadratischen Differential von \mathfrak{F} die Residuensumme Null hat. van der Waerden (Leipzig).

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Chiellini, Armando: Sugli invarianti del sistema differenziale formato da due equazioni lineari omogenee del secondo ordine. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 10, 109—120 (1940).

Pour la recherche d'un système complet d'invariants d'un système linéaire et homogène de deux équations différentielles, par rapport au groupe linéaire et homogène des inconnues (système caractéristique des surfaces réglées), l'A. emploie une méthode directe, qui consiste à ramener le système, par une transformation du groupe, à une forme qu'il appelle réduite alternée et à chercher le comportement des coefficients par rapport aux transformations du groupe, qui conservent cette forme réduite; les invariants s'en dégagent aussitôt. L'A. donne ensuite les conditions pour que les invariants soient constants et en fait l'application à l'intégration des systèmes correspondants. Al. Pantazi (Bucarest).

Tôyama, Hiraku: Some inequalities in the theory of linear differential equations. Tôhoku Math. J. 47, 210—216 (1940).

Voraussetzung: $\mathfrak{x}(t) = (x_1, \dots, x_n)$ ein Vektor, dessen Komponenten $x_v = x_v(t)$ in $\langle a, b \rangle$ reell und stetig sind; $A(t) = (a_{p,q})$ eine quadratische Matrix, deren n^2 Elemente $a_{p,q}(t)$ ebenfalls in $\langle a, b \rangle$ stetig sind;

$$|\mathfrak{x}| = \left(\sum_{p=1}^n |x_p|^k \right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{mit } k > 1; \quad |A(t)| = \max_{|\mathfrak{x}| > 0} \frac{|A\mathfrak{x}|}{|\mathfrak{x}|},$$

wo $A\mathfrak{x}$ das Produkt aus der Matrix A und dem Vektor \mathfrak{x} , d. h. $A\mathfrak{x} = (A_1, \dots, A_n)$ mit $A_p = \sum_q a_{p,q} x_q$ ist. — Behauptung: Für jede eigentliche Lösung $\mathfrak{x}(t)$ des Differentialgleichungssystems

$$(1) \quad \mathfrak{x}'(t) = A\mathfrak{x}$$

gilt

$$(2) \quad \exp\left(-\int_a^b |A(t)| dt\right) \leq \frac{|\mathfrak{x}(b)|}{|\mathfrak{x}(a)|} \leq \exp\left(\int_a^b |A(t)| dt\right).$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{x}(a) \exp\left(\pm \int_a^t |A(t)| dt\right)$ ist. — Den größten Raum der Arbeit nimmt die Untersuchung über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens ein. Die Ungleichung (2) beweist Verf. unter Heranziehung von Cauchys approximierenden Polygonzügen. Die Ungleichung ergibt sich aber auch leicht unmittelbar. Denn aus den Gleichungen (1), d. h. $\mathfrak{x}'_p = A_p$ folgt

$$\frac{|\mathfrak{x}'|}{|\mathfrak{x}|} \leq \left(\sum_p |x_p|^k \right)^{-1} \sum_p |x_p|^{k-1} |x'_p| = \frac{\sum |x_p|^{k-1} |A_p|}{\sum |x_p|^k},$$

und hieraus mit der Hölderschen Ungleichung in der Gestalt (2·8·3) auf S. 24 von Hardy-Littlewood-Pólya, Inequalities, Cambridge 1934 (dies. Zbl. 10, 107)

$$\frac{|\mathfrak{x}'|}{|\mathfrak{x}|} \leq \frac{(\sum |A_p|^k)^{\frac{1}{k}}}{(\sum |x_p|^k)^{\frac{1}{k}}} \leq |A(t)|,$$

und hieraus schließlich durch Integration die Ungleichung (2). Kamke (Tübingen).

Graffi, Dario: Sopra alcune equazioni differenziali non lineari della fisica-matematica. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, IX. s. 7, 121—129 (1940).

H. und É. Cartan haben die Existenz wenigstens einer periodischen Lösung der Differentialgleichung $L \frac{d^2 i}{dt^2} + (R - \psi(i)) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$ nachgewiesen, falls L, R, C positive Konstante und $\psi(i)$ eine gerade, stetige abnehmende Funktion von i mit $\psi(0) > R$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \psi(i) = 0$ sind [Ann. Post. Télégr. Téléph. 14, 1196—1207 (1925)]. — Verf. betrachtet allgemeiner die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + f\left(i, \frac{di}{dt}\right) \frac{di}{dt} + \varphi(i) = 0$$

unter den folgenden Voraussetzungen: $\varphi(i)$ ist in $(-\infty, +\infty)$ definiert, stetig, wachsend mit $\varphi(0) = 0$, $\lim_{i \rightarrow -\infty} \varphi(i) = -\infty$, $\lim_{i \rightarrow +\infty} \varphi(i) = +\infty$; $f(i, i')$ ist für $|i| < \infty$, $|i'| < \infty$ definiert, bezüglich (i, i') stetig, und es gilt $f(i, i') \geq -M$ mit endlichem M ; ferner soll jedes durch die Anfangsbedingungen $i(t_1) = i_1$, $i'(t_1) = i'_1$ bestimmte Integral der Gleichung das ganze Intervall $(t_1, +\infty)$ zum Existenzgebiet haben. Verf. beweist dann, daß die Integrale der Differentialgleichung oszillierenden Charakter haben, und daß die Amplitude einer Oszillierenden für $t \rightarrow +\infty$ nicht gegen Null streben kann. Unter weiteren Einschränkungen bezüglich der Funktion $f(i, i')$ wendet Verf. die Schlußweise von H. und É. Cartan zum Beweis dafür an, daß (1) wenigstens ein periodisches Integral besitzt.

Giovanni Sansone (Firenze).

Obrechhoff, Nikola: Sur quelques questions liées avec la théorie des probabilités. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 34, 35—119 u. franz. Zusammenfassung 120—127 (1938) [Bulgarisch].

L'a. s'occupe du comportement asymptotique des solutions des équations aux différences

$$(1) \quad y_i(n+1) = \sum_{s=1}^r a_{is} y_s(n) + f_i(n), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

en étendant les résultats de Fréchet pour le cas général où les nombres $a_{ks}^{(n)}$ définis par $a_{ks}^{(n)} = \sum_{i=1}^r a_{ki}^{(n-1)} a_{is}$, $a_{ks}^{(1)} = a_{ks}$ ne sont soumis à aucune restriction. Pour les solutions $y_i(n)$, des équations (1) qui satisfont aux conditions $y_i(1) = y_i$, $i=1, 2, 3, \dots, r$, il trouve la formule

$$(2) \quad y_k(n) = - \sum_{s=1}^r y_s \sum_{\mu=1}^m \sum_{i=1}^{\lambda_{\mu}} A_{\mu i}^{(s,k)} A_{n-1}^{i-1} \alpha_{\mu}^{n-1} - \sum_{s=1}^r \sum_{\mu=1}^m \sum_{i=1}^{\lambda_{\mu}} A_{\mu i}^{(s,k)} \sum_{h=1}^{n-1} A_{h-1}^{i-1} \alpha_{\mu}^{h-1} f_s(n-h)$$

où les nombres $A_{\mu i}^{(s,k)}$ sont définis par

$$\frac{D_{s,k}(z)}{D(z)} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{i=1}^{\lambda_{\mu}} \frac{A_{\mu i}^{(s,k)}}{(1 - \alpha_{\mu} z)^i}, \quad A_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n},$$

et $D_{s,k}(z)$ sont les mineurs du déterminant

$$D(z) = \begin{vmatrix} za_{11} - 1 & za_{12} & \dots & za_{1r} \\ za_{21} & za_{22} - 1 & \dots & za_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ za_{r1} & za_{r2} & \dots & za_{rr} - 1 \end{vmatrix}.$$

L'étude de $y_k(n)$ pour $n \rightarrow \infty$ est basé sur cette formule (2). Le travail contient aussi quelques résultats pour la convergence de la série de Charlier. *Autoreferat.*

Partielle Differentialgleichungen. Kontinuierliche Gruppen:

Court, Louis M.: A theorem on maxima and minima with an application to differential equations. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 20, 99—106 (1941).

Es sei $\Phi(q^1, \dots, q^n)$ eine Funktion mit stetigen ersten und endlichen zweiten Ableitungen in einem Bereiche A . Es wird vorausgesetzt, daß es zu jedem Punkte $Q(q^1, \dots, q^n) \in A$ genau eine durch Q hindurchgehende Hyperebene $P(p_1, \dots, p_n)$ gibt, auf der Φ in Q ein eigentliches Maximum (Minimum) besitzt. Die p_i sind also in A und die inversen Funktionen q^i in einem Bereiche B definiert, und es gilt die Beziehung $p_i q^i = 1$. Dann besitzt die Funktion $\Psi(p_1, \dots, p_n) \equiv \Phi[q^1(p_1, \dots, p_n), \dots, q^n(p_1, \dots, p_n)]$ auf dem durch Q hindurchgehenden Büschel von Hyperebenen in P ein eigentliches Minimum (Maximum). Der Satz wird mittels geometrischer Betrachtungen bewiesen und zu einer Transformation von vollständig integrierbaren Pfaffschen Gleichungen verwendet. *O. Borůvka (Brünn).*

Zwirner, Giuseppe: Su una proprietà di media relativa alle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine con un numero qualsiasi di variabili. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 12, 22—29 (1941).

Verallgemeinerung auf den Fall mehrerer Veränderlichen einer vom Ref. angegebenen (dies. Zbl. 17, 113) kennzeichnenden Integraleigenschaft der Lösungen der im Titel genannten Gleichungen. *G. Cimmino (Bologna).*

Gevrey, Maurice: Sur le problème de la dérivée oblique relatif aux équations linéaires aux dérivées partielles ou intégrodifférentielles du type elliptique canonique à deux variables. C. R. Acad. Sci., Paris 213, 635—637 (1941).

Ein vom Verf. früher angegebenes (dies. Zbl. 11, 403) Verfahren für die Zurückführung des im Titel genannten Problems auf eine Fredholmsche Integralgleichung wird hier in etwas allgemeinerer Form aufgefaßt, welche weniger einschränkende Vor-

aussetzungen erfordert und die Verallgemeinerung auf Gleichungssysteme ermöglicht. Ein zweites Verfahren für die Behandlung desselben Problems wird angekündigt.

G. Cimmino (Bologna).

Bureau, Florent: L'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique normal. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, IV. s. 3, 1—67 (1939).

Diese Arbeit ist eine systematische Darlegung der Hadamardschen Untersuchungen über die Integration partieller linearer hyperbolischer Gleichungen zweiter Ordnung vom normalen Typus ohne Benutzung der „Méthode de descente“ von Hadamard, für den Fall $n=2m$. Verf. benutzt eine Methode, die Friedrichs und Hadamard schon verwendet hatten. — Die Gleichung wird hier in die invariante Form $\Delta_2 u + \nabla u + Du = \varphi$ gesetzt, wo Δ_2 der Beltramische Operator und $\nabla u = C^k \frac{\partial u}{\partial x^k}$ ($k=1, 2, \dots, n$) in tensorieller Schreibweise, mit kontravariantem Vektor C^k ist. D und $\varphi(x^1, \dots, x^n)$ sind Invarianten. Im ersten Abschnitt werden die nötigen Begriffe des Tensorkalküls dargestellt und die Greensche Formel in einer invarianten Form gegeben. Im zweiten Abschnitt wird die Integrationsmethode entwickelt. Die Formel, die den Wert von u im Punkte $M(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ gibt, enthält im Fall $n=2m+1$ das bekannte Hadamardsche Symbol für den endlichen Teil eines Integrals. Im Falle $n=2m$ enthält dieselbe Formel das Symbol: Logarithmischer Teil eines divergenten Integrals. Dies gibt die Möglichkeit, die méthode de descente zu vermeiden. N. Theodorescu.

Michlin, S.: Application de la transformation de Laplace aux problèmes limites pour l'équation des ondes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 31, 305—307 (1941).

Man sucht für die Gleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$ der zylindrischen Wellen eine Lösung U , die für $t \geq 0$ in einem halbzylindrischen Bereich G bestimmt ist, dessen Direktrix eine geschlossene Kurve L mit stetiger Biegung ist. Die Randbedingungen sind: $U(x, y, 0) = F(x, y)$; $U_t(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ im Inneren von L ; $U = \psi(x, y, t)$ (für $t \geq 0$) über L , mit bekannten Funktionen F, φ, ψ . — Das Problem kommt auf die Integration einer Integrodifferentialgleichung hinaus, die durch Anwendung der Laplace-Transformation auf eine Integralgleichung vom Fredholmischen Typus, die durch die Methode der sukzessiven Approximationen lösbar ist, zurückgeführt wird. — Durch Umkehrung dieser Laplace-Transformation erhält man darnach eine Lösung des gegebenen Problems. — Der Fall der Gleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$ der Kugelwellen wird durch eine ähnliche Methode behandelt mit Hilfe einer Iteration, um eine Integralgleichung mit quadratisch integrierbarem Kerne zu erhalten.

N. Theodorescu (Bukarest).

Potier, Robert: Sur la validité du principe d'Huyghens-Fresnel. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 229—231 (1941).

Die harmonische Oszillation T_v der Temperatur im Punkte $M(x, y, z)$ eines homogenen Mittels erfüllt die Gleichung (*) $\Delta T_v = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial T_v}{\partial t}$, wo Δ das Laplacesche Symbol, α eine charakteristische Konstante des Mittels sind. — Man sucht eine Lösung der Form $T_v = \Re(\Psi_v)$, wo $\Psi_v = a_v(x, y, z)e^{i\nu t}$ eine komplexe Lösung von (*), $\Re(\Psi_v)$ den Realteil von Ψ_v und $a_v(x, y, z)$ eine komplexe Funktion bedeuten. Man hat auch $\Delta \Psi_v = \frac{1}{i\nu \alpha^2} \frac{\partial^2 \Psi_v}{\partial t^2}$, so daß im Nullpunkte

$$(T_v)_0 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} e^{-kr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial T_v(t - \frac{r}{v})}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{T_v(t - \frac{r}{v})}{r} \cos(\vec{n}, \vec{r}) + k \frac{T_v(t - \frac{r}{v})}{r} \cos(\vec{n}, \vec{r}) \right\} d\sigma$$

gilt. Hier bedeutet Σ eine den Nullpunkt umgebende Fläche, $T(t - \frac{r}{v}) = T_v(x, y, z, t - \frac{r}{v})$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $k = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\nu}{2}}$, $v = \alpha \sqrt{2\nu}$, \vec{n} ist der Normalvektor von Σ . — Die

obige Formel zeigt, daß die Variation der Temperatur im Nullpunkte durch die Wirkung von thermischen, über Σ verteilten Oszillatoren (Vibrateurs) erklärt werden kann, wobei aber die Amplituden und die Phasen nicht diejenigen des Huyghens-Fresnelschen Postulates sind. Zum Beispiel findet man im Falle einer ebenen Welle eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ und eine $\sqrt{2}$ -mal größere Amplitude als diejenige des Huyghens-Fresnelschen Prinzips. Dieses Verfahren kann auch in der Erforschung anderer Fälle, z. B. bei elektromagnetischen Wellen, verwendet werden.

N. Theodorescu (Bukarest).

Cartan, Henri: Sur la mesure de Haar. C. R. Acad. Sci., Paris **211**, 759—762 (1940).

Die Existenz des linksinvarianten Maßes wird für im kleinen kompakte Gruppen neu bewiesen, und zwar unabhängig vom Auswahlpostulat. Der Beweis beruht auf einem Approximationssatz, der besagt, daß unter geeigneten Voraussetzungen eine gegebene stetige Funktion $f(x)$ durch Summen $\sum c_i g(s_i^{-1}x)$ gleichmäßig approximiert werden kann.

van der Waerden (Leipzig).

Variationsrechnung:

Gillis, Paul: Sur certains problèmes réguliers du calcul des variations. (Liège, 17.—22. VII. 1939.) C. R. Congr. Sci. Math. 79—80 (1939).

Die Aufgabe, dem Integral

$$J[z] = \int \dots \int F(p^i) dx^1 dx^2 \dots dx^n \quad (p^i = \partial z / \partial x^i, i = 1, \dots, n)$$

einen Kleinstwert zu erteilen, hat genau eine Lösung $z(x^1, \dots, x^n)$, wenn Bedingungen erfüllt sind, die Verf. in einer früheren Arbeit angegeben hat (dies. Zbl. **20**, 371).

Koschmieder (Graz).

Lepage, Th.-H.: Sur les surfaces adjointes de Haar et les champs géodésiques. (Liège, 17.—22. VII. 1939.) C. R. Congr. Sci. Math. 113—119 (1939).

Das Kernstück der Arbeit von Haar [Math. Ann. **100**, 481—502 (1928)] über die zu den Extremalen \mathfrak{E} gewisser Doppelintegrale

$$I = \int \int \mathfrak{F}(L, M, N) du dv, \quad L = \partial(y, z) / \partial(u, v), \quad M = \partial(z, x) / \partial(u, v), \quad N = \partial(x, y) / \partial(u, v)$$

adjungierten Flächen $\bar{\mathfrak{E}}$ ist eine birationale involutorische Berührungstransformation \mathfrak{L} , die sich durch die Formeln ausdrückt

$$\bar{L} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}_L, \quad \bar{M} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}_M, \quad \bar{N} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}_N, \quad \mathfrak{F}(\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}) = \mathfrak{F}(L, M, N);$$

$\bar{\mathfrak{E}}$ ist Extremale von $\bar{J} = \int \int \mathfrak{F} du dv$. Haar gelangte zu \mathfrak{L} von den notwendigen Bedingungen her, dem Ansatz $\delta J = 0$. Verf. zeigt hier, daß man zu \mathfrak{L} auch kommen kann, wenn man von den hinreichenden Bedingungen ausgeht, nämlich dem Begriff des geodätischen Feldes (g. F.): Die Differentiale der Koordinaten eines Punktes von $\bar{\mathfrak{E}}$ sind die Pfaffschen Formen $[\bar{\omega}_1], [\bar{\omega}_2], [\bar{\omega}_3]$, wo

$$\bar{\omega}_1 = \mathfrak{F}_N dy - \mathfrak{F}_M dz, \quad \bar{\omega}_2 = \mathfrak{F}_L dz - \mathfrak{F}_N dx, \quad \bar{\omega}_3 = \mathfrak{F}_M dx - \mathfrak{F}_L dy$$

ist und die Klammer den im Felde genommenen Wert der eingeklammerten Größe andeutet. Diese Formeln erscheinen als Sonderfälle allgemeinerer, bei denen \mathfrak{F} außer von L, M, N auch von x, y, z abhängen kann. — \mathfrak{L} hat außer den von Haar angegebenen Eigenschaften noch enge Beziehung zur Ermittlung kanonischer Veränderlichen in den ein g. F. erklärenden Differentialgleichungen: Führt man die Form

$$\Omega = \mathfrak{F}_L dy dz + \mathfrak{F}_M dz dy + \mathfrak{F}_N dx dy,$$

die in einem g. F. ein vollständiges Differential ist, durch eine Verwandlung, die sich aus einer Legendreschen Berührungstransformation \mathfrak{Q} und einer Inversion \mathfrak{J} zusammensetzt, in kanonische Gestalt über, so ist $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{J} = \mathfrak{L}$.

Koschmieder (Graz).

Morse, Marston, and C. Tompkins: The continuity of the area of harmonic surfaces as a function of the boundary representations. Amer. J. Math. **63**, 825—838 (1941).

Sia S una superficie dello spazio reale, euclideo a m dimensioni definita da equazioni

del tipo $x_i = x_i(u, v)$, per $i = 1, 2, \dots, m$, con le $x_i(u, v)$ continue nel cerchio $u^2 + v^2 \leq 1$ e armoniche all'interno e le $p_i(\vartheta) = x_i(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ a variazione totale, $V(p_i)$, limitata (nell'intervallo $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$). Nell'insieme Σ descritto da $p(\vartheta) \equiv \{p_1(\vartheta), \dots, p_m(\vartheta)\}$ si introduca una distanza $\varrho(p, q)$ ponendo, per $p(\vartheta) \in \Sigma$, $q(\vartheta) \in \Sigma$,

$$\varrho(p, q) = \sum_1^m \{|V(p_i) - V(q_i)| + \max |p_i(\vartheta) - q_i(\vartheta)|\},$$

con ciò Σ si converte in uno spazio metrico M . Si indichi infine con $\Omega(p)$ l'area di S . Allora l'area di S è in M una funzione continua (non lo sarebbe nello spazio

metrico che si otterrebbe da Σ ponendo $\varrho(p, q) = \sum_1^m \max |p_i(\vartheta) - q_i(\vartheta)|$), mentre

$$D(p) = \frac{1}{2} \iint_{u^2 + v^2 < 1} \sum_1^m \left\{ \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} \right)^2 \right\} du dv \text{ non è continuo, sibbene inferiormente}$$

semicontinuo in M . Vale la $\Omega(p) \leq D(p)$ e l'uguaglianza sussiste se e soltanto se S è una superficie minima, nel qual caso $p(\vartheta)$ è detto un punto critico di $D(p)$. Quindi $D(p)$ è continuo nell'insieme dei propri punti critici. Gli AA. estendono i loro risultati al caso che le $x_i(u, v)$ siano date su una regione delimitata da un numero finito di cerchi o su una superficie di Riemann.

G. Scorza Dragoni (Padova).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Bădescu, Radu: Sur une extension des théorèmes de Fredholm. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 27, 78—85 (1941).

L'A. apporta alcuni complementi ad alcuni suoi precedenti risultati relativi alle equazioni di Fredholm nel campo complesso (vedi questo Zbl. 1, 141; 3, 58 e 398; 9, 72).

C. Miranda (Torino).

Trjitzinsky, W. J.: Singular Lebesgue-Stieltjes integral equations. Acta math. 74, 197—310 (1941).

Avant d'analyser ce mémoire rappelons l'historique de la théorie des opérateurs symétriques, non bornés, de l'espace de Hilbert. M. Carleman le premier les étudia, sous la forme suivante: D étant un domaine d'un espace euclidien, x et y étant des points de D , dy étant l'élément de volume, l'espace de Hilbert était celui des fonctions mesurables, $\varphi(y)$, telles que $\int_D \varphi(y)^2 dy$ fût fini; l'opérateur était $\int_D L(x, y) \varphi(y) dy$, où $L(x, y)$ était une fonction continue sur $D \times D$, telle que $L(x, y) = L(y, x)$ et que $\int_D L^2(x, y) dy$ fût une fonction finie en chaque point x de D , mais de somme non

nécessairement finie (Carleman, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala 1923). Puis M. von Neumann [Math. Ann. 102, 49—131, 370—427 (1929)] donna, à cette théorie des opérateurs symétriques de l'espace de Hilbert, une forme abstraite, qui apportait un symbolisme extrêmement clair et maniable, mais aucun fait important nouveau et qui négligeait même certains résultats secondaires de la théorie de M. Carleman. Signalons enfin que M. v. Neumann citait très brièvement M. Carleman, sans même lui reconnaître une priorité pourtant indiscutable. — Le travail que nous analysons omet cette fois de citer les travaux de M. v. Neumann et n'en tient même pas compte. Ce volumineux mémoire consiste essentiellement à reproduire celui de M. Carleman en y désignant par dy non plus l'élément de volume, mais la différentielle d'une fonction d'ensemble, positive, complètement additive, continue: aucune des démonstrations et aucun des énoncés n'est altéré par cette modification. Le mémoire de M. Carleman est en fait l'étude de l'équation $\varphi(x) - \lambda \int_D L(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$; à l'imitation de M. Gunther [Trav. Inst.

phys.-math. Stekloff 1, 1—494 (1932); ce Zbl. 6, 297], l'A. introduit, à côté de cette équation la suivante $\psi(e_y) - \lambda \int_D \left[\int_D L(x, y) dy \right] d\psi(e_x) = F(e_y)$ où $F(e)$ et $\psi(e)$ sont

deux fonctions d'ensemble, complètement additives, continues; cette deuxième équation se résout de la même façon que la première, par l'intermédiaire de la fonction spectrale. Enfin l'A. apporte une rectification à un mémoire antérieur (ce Zbl. 24, 208).

J. Leray (Paris).

Glaser, Walter: Über die zu einem vorgegebenen Magnetfeld gehörende Windungsdichte einer Kreisspule. Z. Physik 118, 264—268 (1941).

Die Frage, mit welcher Windungsdichte eine Kreisspule (von unendlicher Länge) gewickelt werden muß, um in ihrer Achse ein Magnetfeld von vorgeschriebenem Verlauf zu erzeugen, führt auf eine Integralgleichung

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) (1 + (x - \xi)^2)^{-\frac{3}{2}} d\xi.$$

Es wird gezeigt, daß allgemein für die Integralgleichung

$$(1) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - \xi) g(\xi) d\xi$$

eine Lösung in der Gestalt $g(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^*(u) e^{i u \xi}}{K^*(u)} du$

mit

$$f^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i u t} dt, \quad K^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\eta) e^{-i u \eta} d\eta$$

gefunden werden kann, wenn die nötigen Konvergenzbedingungen erfüllt sind. Der vom Verf. formal angeschriebene „lösende Kern“ existiert niemals. — Eine andere Behandlung von (1) durch Reihenentwicklungen nach Hermiteschen Polynomen stammt von C. Runge [Math. Ann. 75, 130—132 (1914)].

W. Magnus (Berlin).

Richter, Hans: Untersuchungen zum Erneuerungsproblem. Math. Ann. 118, 145—194 (1941) u. Leipzig: Habilitationsschrift 1941.

Bezeichnet $P(t)$ die Absterbeordnung, $H(t)$ den Umfang einer aus kontinuierlich vielen Elementen bestehenden Gesamtheit, und $\Phi(t)$ die Zugangsfunktion, so findet der „rechnungsmäßige Ablauf“ des sog. Erneuerungsvorgangs in der Integralrelation

$$(*) \quad H(t) = P(t) + \int_0^t P(t - k) d\Phi(k)$$

den formelhaften Ausdruck. Aus den bezeichneten Funktionen ergeben sich weiter: Ausscheideintensität $p(t) = -P'(t)$ und Erneuerungsfunktion $\varphi(t) = \Phi'(t)$, falls die angeschriebenen Ableitungen vorhanden sind. Der Integralgleichung (*) ist innerhalb der versicherungswissenschaftlichen Literatur eine erhebliche Bearbeitung zuteil geworden. Insbesondere wurde dem eigentlichen Erneuerungsproblem große Beachtung geschenkt, wobei es sich darum handelt, die Erneuerungsfunktion (kurz: Ef.) so zu ermitteln, daß der Umfang konstant ausfällt, eine im Hinblick auf die versicherungstechnische Deutung naheliegende Aufgabenstellung. Verschiedene ältere und neuere Arbeiten zielten darauf hin, über das asymptotische Verhalten der Ef. allgemeingültige Aussagen zu machen, und etwa unter geeigneten Voraussetzungen die eigentliche Stabilisierung, d. h. $\varphi(t) \rightarrow c$ für $t \rightarrow \infty$ ($c = \text{konst.}$) nachzuweisen. Neuerdings wurde auch die Stabilisierung im Mittel, d. h. $\frac{1}{t} \Phi(t) \rightarrow c$ für $t \rightarrow \infty$ betrachtet, die naturgemäß unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen abgeleitet werden kann. Ref. stellt fest, daß gerade unter dem Einfluß einer sich auf die eigentliche Stabilisierung beziehenden Streitfrage (Gegenbeispiel zu einer älteren, unrichtigen Behauptung: H. Hadwiger, dies. Zbl. 19, 36 und 20, 247; eine erste Behandlung des sich hieraus ergebenden allgemeinen Problems: H. Richter, dies. Zbl. 22, 254 und 24, 163) die Untersuchungen über das Erneuerungsproblem einen neuen Auftrieb

erfahren, und nun durch die vorliegende Habilitationsschrift des Verf. einen befriedigenden Abschluß gefunden haben. Im Gegensatz zu älteren Arbeiten (z. B. E. Zwinggi, dies. Zbl. 1, 218; L. Herbelot, Bull. trim. Inst. Actuaire Français 1909) stellt die Abhandlung des Verf. eine Verarbeitung des gesamten Problemstoffes dar, die sich durch besondere mathematische Gründlichkeit auszeichnet. — Mit Rücksicht auf den Faltungscharakter der Integralgleichung (*) ist es naheliegend, die Theorie der Fourier-Transformation heranzuziehen, und das Problem des asymptotischen Verhaltens der Ef. nach der Methode der indirekten Abelschen Asymptotik zu behandeln. Verf. setzt voraus (schwächer als üblich!): $P(t)$ totalstetig, $P(0) = 1$, $P(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und

$\int_0^\infty P(t) dt$ existiert. Die Existenz dieses Integrals wird noch mit dem asymptotischen Verhalten der Sterbensintensität $\mu(t) = \frac{p(t)}{P(t)}$ in Beziehung gebracht, und gezeigt,

daß $\int_0^\infty x^n p(x) dx$ für alle $n \leq l$, $l = \liminf_{t \rightarrow \infty} t \mu(t)$, konvergiert. Verf. zeigt: Mit

$H(t)$ ist auch $\Phi(t)$ in $0 \leq t \leq T$ totalstetig. Notwendig für die eigentliche Stabilisierung ist die Existenz einer zu $p(t)$ äquivalenten Funktion $\hat{p}(t)$ mit $\hat{p}(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Einen Beweis dieses Satzes hat Verf. bereits in einer früheren Note (dies. Zbl. 24, 163) skizziert. Hauptresultate des Verf. sind folgende: Unter der Voraus-

setzung, daß die Integrale (a) $\int_0^\infty t p(t) dt$ und (b) $\int_0^\infty [p(t)]^2 dt$ existieren, tritt Stabilität im Mittel ein; unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß auch das Integral (c) $\int_0^\infty t p(t) \ln t dt$

existiert, ergibt sich die eigentliche Stabilisierung. Ref. bemerkt zu diesen asymptotischen Sätzen, daß die Stabilität im Mittel auch aus einem Tauberschen Satz (vgl. G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, S. 208, Satz 2; dies. Zbl. 18, 129) ohne Voraussetzung der quadratischen Integrierbarkeit (b) gefolgert werden kann. — Verf. erzielt diese Resultate durch sorgfältige Behandlung der Integraldarstellung (Umkehrformel) der Ef., für die er nach Zerlegung in reelle Bestandteile und Grenzübergang (Verschiebung des Integrationsweges auf den Rand der Regularitätshalbebene) eine Darstellung durch ein Dirichletsches Integral, für den Integralmittelwert der Ef. ein Féjersches Integral gewinnt. — Die Abhandlung bringt ferner eine Erweiterung des ursprünglichen Problems auf den Fall beliebiger Anfangsaltersgliederung. In einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtung kommt Verf. auf einen weiteren Begriff, indem er die Streuung $s(t)$ von $\Phi(t)$ im Zeitpunkt t betrachtet, und von wahrscheinlichkeitstheoretischer Stabilisierung spricht, wenn nicht nur $\frac{1}{t} \bar{\Phi}(t) \rightarrow c$ ($\bar{\Phi}$ = Erwartungswert von Φ), sondern auch $\frac{s(t)}{\bar{\Phi}(t)} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ gilt.

H. Hadwiger (Bern).

Mircoli de Luchini, Laura: Berechnung und Vertafelung von Bildfunktionen der Laplaceschen Transformation. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid 33, 403—450 (1936) [Spanisch].

Die Verf. stellt eine Tafel von 55 Bildfunktionen der Laplaceschen Transformation zusammen. Sie bearbeitet 8 Arten von Dingfunktionen: I. Exponentielle. II. Potenzen. III., IV. Verschiedenartige Verbindungen von I. V. Logarithmen. VI. Verbindungen von I, II, V. VII. Trigonometrische, VIII. Zyklometrische Funktionen. — Der Tafel schickt sie Erläuterungen voraus, in denen sie an Beispielen die Konvergenzabszisse des Laplaceschen Integrals bestimmt und Bildfunktionen ausrechnet. In der Tafel kommen weniger bekannte Bildfunktionen nur selten in geschlossener Form, vielmehr meist in Gestalt von Newtonschen (Faktoriellen-) oder von Fakultätenreihen vor, in denen sie für die Anwendungen wohl weniger ergiebig sind. — Dem Besprecher leuchtet nicht ein, warum Verf. zu vielen Formeln noch selbstverständliche Sonderfälle angibt, z. B. zu 1) auf S. 424/25 noch 2) und (auf S. 426/27) 3); ferner auf S. 440/41, wo 1)

und 3) Sonderfälle von 2) und 4) sind. — Auf S. 403 wird von x als komplexer Veränderlicher gesprochen, auf S. 404 aber die Newtonsche Reihe in der Gestalt $\sum_{n=0}^{x-1} \binom{x-1}{n} C_n$

geschrieben, was doch nur zutrifft, wenn x eine natürliche Zahl. — Zum Verständnis der Formeln sei bemerkt, daß Verf. die Zeichen $\Gamma(x+1)$ und $x!$ in demselben Sinne gebraucht, auch wenn x keine natürliche Zahl ist. — Die Formeln 9), 11), 12) auf S. 432/33 sind Sonderfälle von III. 2 auf S. 428/29. In 9) lies auf S. 433, Spalte 1 im Nenner 2^{2x-2} statt 2^{x-2} , in 12) lies auf S. 433, Spalte 1 im Nenner 2^{2x} statt 2^{2x+1} und $2x+1$ statt $x+1$. — Bei Reihen wie $(1+x^2)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{-2n}$ [S. 441, 1)] wäre der Gültigkeitsbereich anzugeben; ebenso bei der Reihe für $\arctg \frac{1}{x}$ [S. 443, 5)], in der ferner die Nenner 3, 5, ... heißen müssen statt 3!, 5!, ... *Koschmieder*.

Amerio, Luigi: Sull'inversione della trasformata di Laplace. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 10, 232—259 (1940).

Soit une fonction, réelle ou complexe, $F(t)$, définie pour toutes les valeurs réelles de la variable t ; supposons que sa transformée de Laplace $f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$ soit définie (c.-à-d. que la fonction sous le signe \int soit sommable) lorsque p est dans une bande $\alpha < R(p) < \beta$ du plan de la variable complexe p . On sait que la formule d'inversion de Riemann, $F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{pt} f(p) dp$ vaut en tout point de convergence de la série de Fourier de $F(t)$. L'A. donne la formule d'inversion

$$F(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^n dp$$

(n entier positif); il prouve que cette formule a sur celle de Riemann l'avantage de valoir pour presque toutes les valeurs de t ; en particulier elle vaut en tout point de continuité et en tout point de discontinuité de première espèce de $F(t)$ [à condition qu'en ce point $2F(t) = F(t+0) + F(t-0)$]; la convergence du second membre vers $F(t)$ est uniforme dans tout intervalle de continuité de $F(t)$. Si $F(t)$ possède une dérivée $n^{\text{ième}}$ sommable, $F^{(n)}(t)$, on a dans les mêmes conditions

$$F^{(n)}(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} p^n f(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp.$$

J. Leray (Paris).

Broggi, Ugo: Sulle funzioni determinanti regolari all'infinito. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 4, 12—15 (1941).

Unter Anwendung von Reihen, die nach Laguerreschen Polynomen fortschreiten, gibt Verf. einen neuen Beweis des folgenden Satzes. Wenn die durch das Laplacesche

Integral $\int_0^{+\infty} e^{-ts} \varphi(t) dt$ definierte Funktion $f(s)$ im Unendlichen regulär ist, so besitzt $f(s)$

auf der Begrenzungsgeraden der Konvergenzhalbebene des Laplaceschen Integrals einen singulären Punkt.

Giovanni Sansone (Firenze).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Seorza Dragoni, Giuseppe: Elementi uniti di trasformazioni funzionali e teoremi di dipendenza continua. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 99, 147—151 (1940).

Verf. beweist den folgenden Satz, der bei der Untersuchung der Abhängigkeit der Integrale von Differentialgleichungen mit stetiger rechter Seite von den Anfangswerten und ähnlichen Fragestellungen fruchtbar ist: Es sei $\psi = T(\varphi|\lambda)$ eine ein-

deutige und stetige, von dem Parameter λ abhängige Transformation eines metrischen Raumes Σ auf Untermengen eines kompakten Teiles desselben. Ist diese Transformation für jeden Punkt λ eines metrischen Raumes A definiert, gestattet sie für jeden Wert λ genau ein Fixelement $\omega(\lambda)$ und ist ferner $T(\varphi, \lambda)$ im topologischen Produkt $\Sigma \times A$ bezüglich λ gleichmäßig stetig, so ist $\omega(\lambda)$ eine stetige Funktion von λ .

C. Miranda (Torino).

Fan, Ky: Sur le théorème d'existence des équations différentielles dans l'analyse générale. Bull. Sci. math., II. s. 65, 253—264 (1941).

Es wird folgender Satz bewiesen: x sei eine reelle Zahl, y Element eines Banachraumes \mathcal{C} . Mit \mathfrak{D} werde das Gebiet $|x - x_0| < a$, $\|\overrightarrow{y_0 y}\| \leq b$ bezeichnet, für jedes (x, y) sei $\psi_{(x, y)}$ eine lineare Vektorabbildung der Geraden in \mathcal{C} . Die Funktion $F(x, y) = \psi_{(x, y)}(\overrightarrow{01})$ erfülle die Bedingungen 1) zu jedem $\lambda > 0$ gebe es ein $\delta > 0$, so daß aus $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ stets $\|F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y)\| < \lambda$ folgt in \mathfrak{D} ; 2) die Lipschitzbedingung: Es gibt ein $K > 0$, so daß in \mathfrak{D} $\|F(x, y + \Delta y) - F(x, y)\| < K \|\Delta y\|$ gilt; 3) es sei $\|F(x, y)\| \leq M$ in \mathfrak{D} . Ist $A \leq a$, $A \cdot M \leq b$, so gibt es eine Funktion $y = f(x)$, die für $|x - x_0| < A$ erklärt und stetig ist mit $y_0 = f(x_0)$ und $\|\overrightarrow{f(x_0) f(x)}\| \leq b$ für $|x - x_0| < A$, für die schließlich die Fréchet'sche Ableitung $\partial_x f(x) = \psi_{(x, f(x))}(\nu)$ ist für jeden Geradenvektor ν . — Eine etwas schwächere Aussage stammt von M. Kerner [Prace mat. fiz. 40, 47—67 (1932); dies. Zbl. 6, 202]. Anwendung auf ein Differentialgleichungssystem $\frac{dy_i}{dx} = \Phi_i(x; y_1, y_2, \dots)$ ($i = 1, 2, \dots$) mit unendlich vielen Unbekannten.

G. Köthe (Gießen).

Gavurin, M. K.: Sur les séries potentielles abstraites. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 29, 9—11 (1940).

X, Z seien Banachräume, $x \in X$, $u_0 \in Z$; u_n sei eine n -lineare symmetrische Operation von X in Z . Die Potenzreihe $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ hat dann als Konvergenzbereich A . Sei A der Bereich der inneren Punkte von A . Es wird bewiesen, daß in diesem Bereich die Ableitungen $\varphi^{(k)}(x_0) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} u_n x^{n-k}$ konvergieren und daß $\varphi(x)$ in einer geeigneten Umgebung jedes $x_0 \in A$ durch seine Taylorreihe $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$ dargestellt wird. Eine in einem zusammenhängenden Gebiet eindeutige und durch ihre Taylorreihe darstellbare Funktion wird als analytisch bezeichnet und der Eindeutigkeitssatz und das Prinzip der analytischen Fortsetzung abgeleitet. G. Köthe.

Lijn, G. van der: Sur un opérateur mesurable. (Liège, 17.—22. VII. 1939.) C. R. Congr. Sci. Math. 81—83 (1939).

Soient L et L' deux espaces linéaires et normés. Désignons par $f(x)$ un polynôme de degré n au plus, défini dans l'espace L et dont les valeurs appartiennent à l'espace L' . Un tel opérateur vérifie, par définition, l'équation

$$(I) \quad A_{\omega}^{n+1} f(x) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} f(x + \overline{n+1-i} \omega) = 0$$

quels que soient x et ω . Supposons que, pour tout sous-ensemble de l'espace L , soit définie une mesure extérieure $\mu^*(E)$ au sens de C. Carathéodory (S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1938, 27—69; ce Zbl. 20, 297); ce qui, lorsque l'espace L est séparable et localement compact, est possible au moyen de la méthode de A. Haar [Ann. of Math., II. s. 34, 147—169 (1933); ce Zbl. 6, 101]. L'opérateur $f(x)$ sera dit mesurable si, quelle que soit la sphère ouverte S' de l'espace L' , l'ensemble des points x de l'espace L pour lesquels $f(x) \in S'$ est mesurable μ . L'A. démontre le théorème suivant, qui généralise des théorèmes de W. Sierpiński [Sur les fonctions convexes mesurables;

Fundam. Math. 1, 125—129 (1920)] et T. Popoviciu [Mathematica, Cluj 8, 1—85 (1934); ce Zbl. 9, 59]: Pourque le polynome $f(x)$ soit continu, il suffit qu'il soit mesurable. D'après un théorème de S. Mazur et W. Orlicz [Studia Math. 5, 50—68, 179—189 (1935); ce Zbl. 13, 210], il suffit de démontrer que cet opérateur est borné dans toute sphère. C'est ce que fait l'A. en utilisant l'équation (I) et les propriétés de la mesure extérieure $\mu^*(E)$.
Frédéric Roger (Paris).

Maddaus jr., Ingo: On types of „weak“ convergence in linear normed spaces. Ann. of Math., II. s. 42, 229—246 (1941).

Generalizing the notion of “ K -normed sets” given by Vulich [Ann. of Math., II. s. 38, 156—174 (1937); this Zbl. 16, 63], the author introduces the following notion of “ H -normed sets”: A linear set of elements x is H -normed, if to each finite complex (x_1, x_2, \dots, x_n) there is associated a non-negative real number $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|$ such that 1° if $x_i = x_j$, then $\|(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)\| = \|(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_j, \dots, x_n)\| = \|(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)\|$, 2° $\|(x)\| = 0$ implies $x = 0$, 3° if a_1, a_2, \dots, a_n are real constants, then $\|(a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n)\| \leq \max |a_i| \cdot \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|$. — The sequence $\{x_n\}$ is said to converge to the element x in the H -sense, if given any $\varepsilon > 0$ and any infinite subsequence $\{x'_n\}$ of $\{x_n\}$, there exists a $K_0 = K(\varepsilon, \{x'_n\})$ such that $n \geq K_0$ implies $\|(x'_1 - x, x'_2 - x, \dots, x'_n - x)\| < \varepsilon$. — The simplest example of an H -normed set is that of all real numbers if $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \inf(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$. In this case, convergence in the H -sense is equivalent to convergence in the common sense. The set C of all continuous functions $x(t)$ on $(0, 1)$ may be H -normed by putting $\|(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))\| = \max_t \inf(|x_1(t)|, |x_2(t)|, \dots, |x_n(t)|)$; in this case, convergence in the H -sense means convergence in the common sense for each t . Also the set L^p of all measurable functions $x(t)$ on $(0, 1)$ with summable p -th power ($p \geq 1$) may be H -

normed, e.g. by putting $\|(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))\| = \left\{ \int_0^1 (\inf(|x_1(t)|, |x_2(t)|, \dots, |x_n(t)|))^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$.

In this case, convergence of $\{x_n(t)\}$ to $x(t)$ in the H -sense means that for any subsequence $\{x'_n(t)\}$ there is a set E of zero measure such that for $t_0 \notin E$ is a point of accumulation of $\{x'_n\}$ in the common sense. (As an example shows, the H -limit is not necessarily unique.) Thus, by this definition of the H norm in L^p , H -convergence is weaker than weak convergence. Of course, there are also other ways to define an H -norm in L^p . In a wide class of Banach spaces E , including the spaces C , L^p , ℓ^p , etc., one can always define an H -norm in such a way that H -convergence and weak convergence coincide. One has only to put $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \max_f \inf(|f(x_1)|, |f(x_2)|, \dots, |f(x_n)|)$, where f runs over all limited linear functionals on E , for which $\|f\| = 1$. — In the last paragraphs H -continuous linear operations of some concrete H -normed Banach spaces are studied and the general form of such operations is obtained.

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Wong, Y. K.: On the converse of the transitivity of modularity. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 352—355 (1940).

Neuer Beweis für das verallgemeinerte Hellinger-Toeplitz-Theorem in der General Analysis von E. H. Moore (vgl. Y. K. Wong, Diss. Chicago 1931 und E. H. Moore, General Analysis 1939, Pt. 2; dies. Zbl. 20, 366).
Köthe (Gießen).

Julia, Gaston: Décomposition en produit infini des opérateurs linéaires de l'espace hilbertien. J. Math. pures appl., IX. s. 20, 347—362 (1941).

Exposition détaillée des résultats annoncés brièvement dans une Note aux C. R. Acad. Sci., Paris 212, 829—831 (1941) (voir ce Zbl. 25, 65).
Béla de Sz. Nagy.

Nakano, Hidegorô: Unitärinvarianten im allgemeinen Euklidischen Raum. Math. Ann. 118, 112—133 (1941).

Verf. hat kürzlich ein neues vollständiges System von Unitärinvarianten einer normalen Transformation des (separablen) Hilbertschen Raumes mitgeteilt (dies. Zbl.

25, 341). Jetzt dehnt er seine Theorie auf den Fall allgemeiner (nicht notwendig separabler) euklidischer Räume aus. Eine Verallgemeinerung in dieser Richtung ist durchaus nicht trivial, wie das schon Wecken bemerkt hat, der als erster ein solches, auch für den Fall nichtseparabler Räume gültiges vollständiges System von Unitärinvarianten (für selbstadjungierte Transformationen) aufgestellt hat (s. dies. Zbl. 20, 305). In der genannten Arbeit des Verf. wurde zuerst gezeigt, daß jeder Ring \mathfrak{R} vertauschbarer Projektionen in gleichmäßig-dimensionale Nebenringe $R_i \mathfrak{R}$ mit $R_i \in \mathfrak{R}$, $R_i R_j = 0$ für $i \neq j$ zerfällt (vgl. das Referat a. a. O.). Der Beweis dieses Hilfssatzes wurde dadurch ermöglicht, daß in einem separablen Raum jeder Ring \mathfrak{R} universal ist, d. h. mit jedem System $\{P_\omega\}$ von Projektionen aus \mathfrak{R} auch ΣP_ω und ΠP_ω zu \mathfrak{R} gehören, was in nichtseparablen Räumen nicht immer der Fall ist. — So gelingt jetzt eine solche Dimensionalzerlegung nur für universale Ringe; es tritt dabei jetzt jede, auch unendliche Kardinalzahl als Dimension auf. — Dieser Hilfssatz wird nun auf den kleinsten universalen Ring \mathfrak{U} angewendet, der den Eigenring $\{E(Z)\}$ einer normalen Transformation N umfaßt: \mathfrak{U} wird also in Nebenringe $R_1 \mathfrak{U}$, $R_2 \mathfrak{U}$, ..., $R_\alpha \mathfrak{U}$, ... (α durchläuft alle Kardinalzahlen) zerlegt, so daß $R_\alpha \in \mathfrak{U}$, $R_\alpha R_\beta = 0$ für $\alpha \neq \beta$, und $R_\alpha \mathfrak{U}$ gleichmäßig-dimensionale mit der Dimension α ist. Im separablen Falle war \mathfrak{U} gleich $\{E(Z)\}$, also waren die R_i von der Form $E(Z_i)$, und so konnte der Dimensionalzerlegung von \mathfrak{U} eine Zerlegung der Gaußschen Ebene G in paarweise fremde Borelmengen Z_i zugeordnet werden. Jetzt kann man den R_α nur gewisse Idealklassen p_α des Booleschen Ringes aller Borelmengen in G zuordnen. Das System $p_1, p_2, \dots, p_\alpha, \dots$ heißt das Spektralsystem von N . Das Hauptergebnis der Arbeit ist, daß das Spektralsystem ein vollständiges System von Unitärinvarianten für N bildet. Es gelingt dem Verf., alle Idealklassensysteme $p_1, p_2, \dots, p_\alpha, \dots$, die als Spektralsysteme normaler Transformationen N auftreten, durch innere Eigenschaften zu charakterisieren.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Halmos, Paul R.: Statistics, set functions, and spectra. Rec. math. Moscou, N. s. 9, 241—248 (1941).

Es sei R ein teilweise geordneter Banachscher Raum, der gleichzeitig auch ein Ring mit Einselement 1 ist. Das Produkt $f \cdot g$ sei stetig in beiden Faktoren, und es soll aus $f^2 = 0$ folgen, daß $f = 0$. Dann läßt jedes Element f eine Spektraldarstellung $f = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d e_f(\lambda)$ zu, wo $e_f(\lambda)$ eine monotone Schar von idempotenten Elementen aus R ist. $L(f)$ sei eine auf R definierte lineare Operation, für die $L(f) \geq 0$, wenn $f \geq 0$, und $L(1) = 1$. Man betrachte eine Folge f_1, f_2, \dots von Elementen aus R , die unabhängig voneinander in bezug auf L sind, d. h. es soll

$$L(e_{f_1}(\lambda) e_{f_2}(\lambda) \dots e_{f_n}(\lambda)) = L(e_{f_1}(\lambda)) L(e_{f_2}(\lambda)) \dots L(e_{f_n}(\lambda))$$

für alle Werte von $n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gelten. Nimmt man ferner an, daß $L(f_i) = 0$ für $i = 1, 2, \dots$ und $\sum_{i=1}^n L(f_i^2) = o(n^2)$, dann gilt

$$L(e_{|s_n|}(\lambda)) \geq 1 - \frac{1}{n^2 \lambda^2} L(s_n^2) = 1 - o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

wo $s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ ist. Dies ist eine Verallgemeinerung des Gesetzes der großen Zahlen von Bernoulli.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Wiener, Norbert, and Aurel Wintner: On the ergodic dynamics of almost periodic systems. Amer. J. Math. 63, 794—824 (1941).

Der Hauptsatz der Arbeit (Theorem 6) ist folgender. $P \rightarrow T_t P$, $T_t T_s = T_{t+s}$, sei eine stationäre Strömung in einem Raume Ω , bei der ein absolut additives Maß m invariant bleibt, $m(\Omega)$ endlich. Dann gilt erstens: Wenn die Strömung ein reines Punktspektrum hat, so sind die individuellen Bewegungen im allgemeinen fastperiodisch im Sinne B^2 , d. h. bei beliebigem $f(P)$ der Klasse L^2 ist $\varphi(t) = f(T_t P)$ im Sinne der

Distanz

$$\mathfrak{M}(\varphi - h) = \lim_{\substack{A=-\infty \\ B=+\infty}} \frac{1}{B-A} \int_A^B |\varphi(t) - h(t)|^2 dt$$

für fast jedes P beliebig gut durch Exponentialpolynome $h(t)$ approximierbar. Zweitens wird umgekehrt behauptet: Wenn die individuellen Bewegungen in diesem Sinne fast-periodisch sind, so hat die Strömung ein reines Punktspektrum. Diese Behauptung und auch Theorem 7 wird durch folgendes Gegenbeispiel widerlegt: $P = (\varphi, c)$, wo $0 \leq c \leq 1$ ist und φ nur mod 2π bestimmt ist, $T_t P = (\varphi + ct, c)$. Die Bewegungen sind alle periodisch, aber der diskrete Teil des Spektrums der Strömung besteht nur aus dem Eigenwert Null. (Vgl. hierzu §§ 10, 11 des Ergebnisheftes des Ref. „Ergodentheorie“; dies. Zbl. 17, 283.) Die Behauptung und Theorem 7 sind aber richtig, wenn metrische Transitivität der Strömung vorausgesetzt wird. Ihr Beweis wird dann durch die Formel (38) der Arbeit (vgl. auch Satz 14.3 in „Ergodentheorie“) nahegelegt. — Was den ersten, in der Arbeit streng bewiesenen Teil des Hauptsatzes anlangt, so kann er kurz so bewiesen werden. Da die Operatornschar U_t der Strömung, $U_t f(P) = f(T_t P)$, ein reines Punktspektrum hat, lautet die Spektraldarstellung (1) $U_t f = \sum e^{i\lambda_\nu t} D_\nu f$ (summiert über die Eigenwerte λ_ν); die D_ν sind Hermitesche Einheitsoperatoren. Damit ist gleichzeitig die harmonische Analyse der individuellen Bewegungen gegeben. Die Konvergenz rechts in (1) kann im Sinne starker Konvergenz in L^2 aufgefaßt werden. Setzt man $D_\nu f(P) = f_\nu(P)$, so ist

$$d_n(t) = a_n = \int_{\Omega} \left| f(T_t P) - \sum_1^n e^{i\lambda_\nu t} f_\nu(P) \right|^2 dm \rightarrow 0,$$

$n \rightarrow \infty$. Man beweist, daß d_n von t unabhängig ist. Man beweist dann unter Berücksichtigung des Ergodensatzes

$$d_n = \mathfrak{M} d_n = \mathfrak{M} \int_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathfrak{M}.$$

Ganz rechts hängt jetzt der Integrand (≥ 0) nur von P und n ab. Er konvergiert also für $n \rightarrow \infty$ stark gegen Null. Längs einer geeigneten Teilfolge von Zahlen n konvergiert er dann bekanntlich für fast alle P gegen Null. In dieser Aussage ist der Satz enthalten.

E. Hopf (Leipzig).

Riesz, Frédéric: Sur la théorie ergodique des espaces abstraits. Acta Sci. Math. Szeged 10, 1—20 (1941).

Der v. Neumannsche Ergodensatz wird in folgender Richtung verallgemeinert. Es wird ein halbgeordneter linearer und vollständiger Raum zugrunde gelegt, in welchem die Norm $|f|$ für $f \geq 0$ mit einem positiven linearen Funktional zusammenfällt. T ist ein linearer Operator mit der Norm ≤ 1 . Erfüllt T noch eine weitere Bedingung,

so konvergieren die $\varphi_n = \frac{1}{n} \sum_1^n T^i f$ für jedes f im Sinne der Norm $|f|$. In dem speziellen

Fall, wo es sich um die Elemente $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, des Funktionenraums L^1 handelt, ist diese Bedingung mit der gleichmäßigen Totalstetigkeit der $f_n(x) = T^n f(x)$ gleichbedeutend.

E. Hopf (Leipzig).

Riesz, Frederick: Another proof of the mean ergodic theorem. Acta Sci. Math. Szeged 10, 75—76 (1941).

Verf. hatte vor einigen Jahren den v. Neumannschen Ergodensatz verallgemeinert [J. London Math. Soc. 13, 274—278 (1938); dies. Zbl. 19, 414]. Im Falle des Hilbertschen Raumes L^2 lautet der verallgemeinerte Satz folgendermaßen. Sei T ein beschränkter linearer Operator in L^2 mit einer Norm ≤ 1 . Betrachtet man für irgendein Element f_1 aus L^2 die Nachfolger $f_n = T f_{n-1}$, so konvergieren die arithmetischen Mittel φ_n von f_1, f_2, \dots, f_n für $n \rightarrow \infty$ stark. Ein einfacher Beweis wurde von G. Birkhoff gegeben [Duke math. J. 5, 19—20 (1939); dies. Zbl. 21, 236]. — Verf. gibt einen

mit diesem verwandten, sehr einfachen Beweis. Zunächst ist mit $\|g\| < M$ auch $\|g_i\| < M$. Sei μ die untere Grenze von $\|g\|$, wo $g = \sum c_i f_i$ (endliche Summe) ist. $\sum c_i = 1$. γ_n sei das arithmetische Mittel der Nachfolger $g_1 = g, g_2, \dots, g_n$. Für festes g sieht man leicht, daß $\|\gamma_n - \varphi_n\| \rightarrow 0$ ist. Man wähle ein festes g mit $\|g\| < \mu + \varepsilon$. Dann ist auch $\|\gamma_n\| < \mu + \varepsilon$ für alle n . Für $n > N(\varepsilon)$ ist daher $\|\varphi_n\| < \mu + 2\varepsilon$. Nach der von B. Levi beim Dirichletschen Prinzip eingeführten Schlußweise ist wegen $\|(\varphi_n + \varphi_m)/2\| \geq \mu$

$$\left\| \frac{\varphi_n + \varphi_m}{2} \right\|^2 \equiv \frac{1}{2} (\|\varphi_n\|^2 + \|\varphi_m\|^2) - \left\| \frac{\varphi_n - \varphi_m}{2} \right\|^2 < (\mu + 2\varepsilon)^2 - \mu^2$$

für $n > N, m > M$. Die Folge φ_n ist also konvergent. *E. Hopf* (Leipzig).

Riesz, F.: Rectification au travail „Sur la théorie ergodique des espaces abstraits“. Acta Sci. Math. Szeged **10**, 141 (1941).

Richtigstellung eines Versehens in der vorsteh. besprochenen Arbeit. *E. Hopf*.

Praktische Analysis:

● Ludwig, Emil, und Arnulf Reuschel: Vierstellige Logarithmentafeln nebst Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln, sowie der Winkelfunktions- (Zineszins-) und Sterbetafel. Wien: Franz Deuticke 1941. 20 S. RM. —.60.

● Power-tables. British Association for the advancement of science mathematical tables. Vol. 9: Tables of powers giving integral powers of integers. Initiated by J. W. L. Glaisher. Extended by W. G. Bickley, C. E. Gwyther, J. C. P. Miller and E. J. Ternouth. Cambridge: Univ. press 1940. XII, 132 pag. 15/-.

Emde, Fritz: Sechs Berichtigungen zu A. M. Legendres Tafeln der Elliptischen Integrale (Photographischer Nachdruck 1931 bei Wittwer in Stuttgart), aufgefunden und mitgeteilt von Prof. Dr. Gustav Witt, Berlin. Z. angew. Math. Mech. **21**, 254 (1941).

● Meyer zur Capellen, W.: Mathematische Instrumente. (Math. f. Physik. u. Ing. Hrsg. v. A. Kratzer. Bd. 1.) Leipzig: Akad. Verlagsges. Becker & Erler Kom.-Ges. 1941. X, 247 S. u. 210 Fig. RM. 22.—.

Die stürmische Entwicklung der mathematischen Instrumente machte neue Darstellungen dieses Zweiges der angewandten Mathematik seit langem wünschenswert. Das vorliegende Buch wendet sich in erster Linie an den Ingenieur und Physiker und behandelt die Geräte — dem Interessengebiet des Verf. entsprechend — vorzugsweise unter Gesichtspunkten der Kinematik. Rein äußerlich tritt das in der Länge der Hauptabschnitte in Erscheinung; von den 5 Abschnitten über Rechengерäte, geometrische Geräte, Differenziergeräte, Integratoren und harmonische Analysatoren füllt der erste, kinematisch besonders interessante, die Hälfte des Buches. Unter Rechengерäten werden die Hilfsmittel zum elementaren Rechnen, insbes. Rechenschieber und Rechenmaschinen, ferner zum Bilden von Funktionswerten und zur Auflösung von Gleichungen und Gleichungssystemen verstanden. Eine systematische Darstellung der Rechengetriebe unabhängig von ihrem praktischen Auftreten steht an der Spitze. Ein Abschnitt über logarithmische Rechenschieber beschreibt gedrängt, aber trotzdem sehr eingehend den Rechenschieber System „Darmstadt“. Bei den Rechenmaschinen wird auf den inneren Aufbau von Staffelwalzen-, Sprossenrad-, Proportionalhebel- und Schaltklinken-Maschinen sehr ausführlich eingegangen. Das Rechnen mit den Maschinen tritt zurück. Geometrische Geräte nennt der Verf. die Geräte zum Auftragen, Umzeichnen, Kurvenzeichnen und Kurvenmessen. Bei der Behandlung der Geräte zur Infinitesimalrechnung überwiegt naturgemäß die der Integriergeräte. Der Verf. teilt diese nach Ausgliederung der Analysatoren ein in Integrometer (Wiederaufnahme einer älteren, aus sprachlichen Gründen verworfenen Bezeichnung der Integrimeter, jetzt in neuer Bedeutung) und Integraphen, und zwar bezeichnet er als Integrometer alle Geräte für $\int u[y(x)]dx$ mit Meßrolle einschließlich der „Produktplanimeter“ für $\int f(t)dh(t)$, als Integraphen alle sonstigen Geräte, also außer den schreibenden Geräten

jeder Bestimmung auch gewisse Geräte mit Meßrolle. Die Gleichnismethoden werden nur knapp erwähnt. Bei den Analysatoren werden auch nicht-mechanische Verfahren eingeschlossen. — An einigen Stellen haben sich Unrichtigkeiten eingeschlichen; z. B. trifft die historische Bemerkung auf S. 54 über den Ursprung der Sprossenradmaschinen nicht zu, ebenso die Darstellung der Integraliteration auf S. 213 und die Behauptung über Konvergenz der Fourierreihen auf S. 214. An vielen Stellen wäre etwas größere Schärfe beim Gebrauch der mathematischen Fachsprache erwünscht. — Über 200 Bilder. Verzeichnis von 262 neueren Literaturstellen. Namen- und Sachregister.

Theodor Zech (Darmstadt).

Kerridge, Siegfried: Anwendung der Nationalbuchungsmaschine für wissenschaftliche Rechnungen. Z. angew. Math. Mech. 21, 242—249 (1941).

In Anlehnung an L. J. Comrie [Suppl. Royal Statist. Soc. 3, 87—114 (1936)] stellt der Verf. bequeme Verfahren zur Summierung von Differenzen, zur Differenzenbildung und zur Untertafelung mit der Nationalbuchungsmaschine dar. Diese Maschine hat eine Tastatur und 6 Addierwerke. Man kann nicht nur getastete Zahlen addieren, sondern auch den Stand eines Werkes zum Stand eines beliebigen anderen, und zwar mit und ohne Löschung des ersten Werkes. Zwei der Werke können auch subtrahieren. Negative Zahlen werden durch dekadische Ergänzungen dargestellt. Summen und Summanden können gedruckt werden. — Zur Summierung von Differenzen ordnet man einem Zählwerk die Funktionswerte, den 5 anderen Werken die ersten 5 Differenzen zu. Hat man die Werte einer schräg aufsteigenden Linie des Differenzenschemas in den Zählwerken, so geht man durch Addition einer getasteten 6-ten Differenz und durch 5 Additionen von Werk zu Werk zur nächsten schrägen Linie des Differenzenschemas über. — Differenzen können nur bis zur 5-ten Ordnung in einem Zuge gebildet werden. Dabei wird die 5-te Differenz zuerst, und zwar aus dem Funktionswert gleicher aufsteigender Schräglinie und sämtlichen Werten der nächsthöheren Schräglinie des Differenzenschemas unmittelbar gebildet, anschließend die niedrigeren Differenzen durch Summation. — Die Untertafelung mit der Nationalbuchungsmaschine wird an einem Beispiel mit Zehntelung des ursprünglichen Intervalls gezeigt. Unter der Annahme, daß nur Differenzen bis zur 4-ten Ordnung berücksichtigt werden müssen und daß die 4-ten Differenzen selbst unter 1000 Einheiten der letzten mitzunehmenden Stelle liegen, läßt sich die Everettsche Interpolationsformel mit leichter Abänderung so anwenden, daß 7 der gesuchten Zwischenwerte in jedem Intervall als Werte eines kubischen Polynoms erscheinen, was bequemes Arbeiten im Differenzenschema ermöglicht. Zur Vervollständigung des Differenzenschemas werden in jedem Intervall 3 vierte „Brückendifferenzen“ angegeben, welche den Übergang zum nächsten kubischen Polynom vermitteln. — Eine derartige Automatisierung vermeidet Schreib-, Eintast- und Rechenfehler.

Theodor Zech (Darmstadt).

McPherson, J. C.: On mechanical tabulation of polynomials. Ann. math. Statist. 12, 317—327 (1941).

Verf. empfiehlt, zur Vertafelung von Polynomen n -ten Grades von deren konstanten n -ten Differenzen auszugehen und gleichabständige Werte mittels des Differenzenschemas zu gewinnen. Man kommt dann nur mit Additionen aus. Zur Erleichterung des Ansatzes werden Symbole

$${}_jT_i = \sum \binom{x+j-i-1}{j-1} F_x \quad (i < j)$$

für die iterierten Summen einer Funktion F_x des ganzzahligen Argumentes x ($= 1, 2, \dots, a-1, a$) eingeführt. Die explizit angegebenen „Momente“ $\sum x^n F_x$ ($n = 1, 2, \dots, 12$) erleichtern die Herstellung beliebiger Polynome bis zum 12. Grad. Hinweise für Änderung des x -Schrittes.

Theodor Zech (Darmstadt).

Hoel, Paul G.: On methods of solving normal equations. Ann. math. Statist. 12, 354—359 (1941).

Untersucht wird in der vorliegenden Arbeit, welches der verschiedenen Auflösungs-

verfahren am übersichtlichsten und rechnerisch am schnellsten ist. Ein einheitlicher Einblick wird durch Benützung der Ergebnisse von Aitken (dies. Zbl. 17, 147) gewonnen. Die dort entwickelte Methode ist besonders bei Auflösung von Gleichungssystemen mit nichtsymmetrischer Matrix zweckmäßig. Für die Auflösung von Gleichungssystemen mit symmetrischer Matrix, insbesondere zur Berechnung der Inversen dieser Matrix, dürfte eine Methode von Doolittle, die bei Croxton and Cowden, Applied general statistics, New York 1939, S. 716, dargestellt ist, rechnerisch das vorteilhafteste Verfahren sein.

F. Knoll (Wien).

Berger, Erich Rud.: Bestimmung von Deviationsmomenten mit dem Trägheitsmomenten-Planimeter. Z. Instrumentenkde 61, 381—384 (1941).

Es sei df das Flächenelement einer ebenen Figur in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Für die Berechnung des gemischten Momentes $T_{m,n} = \int x^m y^n df$ (m, n ganz, > 0) besteht insbesondere im Fall $m = n = 1$ (Deviationsmoment) praktisches Bedürfnis. Da Geräte zur Bestimmung gemischter Momente nicht im Handel sind, wohl aber Geräte zur Bestimmung reiner Momente $U_{m+n} = \int y^{m+n} df$, wird ein Verfahren angegeben, wie man gemischte Momente aus den reinen Momenten um eine ausreichende Anzahl Achsen durch einen festen Punkt errechnet. Sind etwa α und $\beta \neq 0$, so ist

$$\int (\alpha x + \beta y)^2 df = \alpha^2 \int x^2 df + 2\alpha\beta \int xy df + \beta^2 \int y^2 df$$

eine Beziehung zwischen dem Deviationsmoment $\int xy df$ und drei Trägheitsmomenten, die nach dem Deviationsmoment aufgelöst werden kann. Allgemein erhält man für die $m+n-1$ gemischten Momente ($m+n$ -ter Ordnung ein lineares Gleichungssystem, wenn man eine entsprechende Beziehung mit ($m+n$)-ter statt 2-ter Potenz nacheinander für $m+n-1$ weitgehend willkürliche Wertepaare α_i, β_i aufschreibt.

Theodor Zech (Prag).

Schulz, Werner: Über das Meißnersche Integrationsverfahren für Differentialgleichungen erster Ordnung. Dtsch. Math. 6, 271—276 (1941).

Die Meißnersche Darstellung ordnet jedem Linienelement u, p, p' einen im festen Punkte O beginnenden zweiteiligen Streckenzug OQP zu. $OQ = p$ bildet mit einer festen Richtung den Winkel u , und $QP = p'$ steht auf OQ senkrecht. Die Punkte P der zu einer Funktion $p(u)$ gehörigen Linienelemente $u, p(u), p'(u)$ bilden eine Kurve C , das Linienbild von $p(u)$, die von jeder Strecke PQ in P berührt wird, also Hüllkurve der PQ ist. — Zur zeichnerischen Integration der Differentialgleichung $p' = f(u, p)$ unter der Anfangsbedingung $p(u_0) = p_0$ schlägt der Verf. folgendes Verfahren vor: OQ_0P_0 wird zu dem Linienelement $u_0, p_0, p'_0 = f(u_0, p_0)$ konstruiert. Für einen festen Nachbarwert u_1 von u_0 ist $p' = f(u_1, p)$ eine Funktion von p allein. Das schränkt den zu u_1 gehörigen Punkt P_1 des Linienbildes C der Lösung auf eine Hilfskurve ein. Deren Schnittpunkt \bar{P}_1 mit Q_0P_0 wird als vorläufige Näherung für P_1 benutzt. Die Gerade der Richtung $u_1 + \frac{\pi}{2}$ durch den Mittelpunkt von $P_0\bar{P}_1$ schneidet auf der Hilfskurve die endgültige Näherung $P_1^{(1)}$ ein. Der Fehler des zugehörigen Funktionswertes p_1 gegenüber dem Sollwert $p(u_1)$ ist höchstens von der Größenordnung $(u_1 - u_0)^3$. Wiederholung des Verfahrens von $P_0^{(1)}$ aus usw. liefert diskrete Punkte $P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, \dots$ einer Näherungskurve $C^{(1)}$ für C . Für die Durchführung werden zeichentechnische Hilfsmittel angegeben. — Die unter 6. vorgeschlagene Evolventeniteration ist falsch, wie sich schon daraus ergibt, daß die neue Näherung ohne Benutzung der Differentialgleichung gewonnen wird. Richtig wären zunächst die $P_i^{(1)}$ durch eine glatte Kurve $C^{(1)}$ zu interpolieren. Die zugehörige Funktion $p^{(1)}(u)$ ist in $f(u, p)$ für p einzutragen und das Ergebnis durch sein um $\frac{\pi}{2}$ gedrehtes Linienbild darzustellen. Die durch P_0 gehende Evolvente $C^{(2)}$ dieses Linienbildes ist eine bessere Näherung als $C^{(1)}$. — In einer Aufzählung von Sonderfällen wird u. a. die Cranz-Rothsche Differentialgleichung als bequem nach dem geschilderten Verfahren integrierbar erwähnt.

Theodor Zech.

Collatz, L.: Berichtigung zu der Arbeit: „Vergleich der Integralgleichungsmethode von Buecius mit dem Ritzschen Verfahren“ in *Astron. Nachr.* 271, 116. *Astron. Nachr.* 272, 77 (1941).

Eine in der genannten Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 24, 270) gemachte Einschränkung wird auf Grund einer Bemerkung von Tollmien als unnötig erkannt. *Zech.*

Hildebrand, F. B., and P. D. Crout: A least square procedure for solving integral equations by polynomial approximation. *J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol.* 20, 310—335 (1941).

Zur Lösung einer inhomogenen Integralgleichung 1. Art

$$\Phi(x) = \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi$$

wird für $y(x)$ ein Ansatz gemacht $y(x) \approx \sum_{i=1}^n L_i(x) y_i$ mit noch zu bestimmenden Koeffizienten y_i und $L_i(x)$ als bekannten Funktionen, z. B. den Lagrangeschen Interpolationspolynomen. Dann nimmt beim Einsetzen von $y(\xi)$ das Integral die Gestalt an $W(x) = \sum_{i=1}^n I_i(x) \cdot y_i$ und nach der Methode der kleinsten Quadrate wird $A = \int_a^b [\Phi(x) - W(x)]^2 dx = \text{Minimum}$ gefordert. Dieses Integral wird näherungsweise nach irgendeiner Quadraturregel (z. B. der Simpson-Regel) ausgewertet unter Benutzung von m Abszissen x_1, \dots, x_m . Dadurch, daß die Verf. größere Werte von m verwenden (m darf größer als n sein, darin liegt der Vorteil der Methode), wird eine hohe Genauigkeit erzielt, wie an dem Beispiel eines Randwertproblems der Potentialtheorie ausführlich dargestellt wird. Auf die gleiche Weise können auch inhomogene Integralgleichungen 2. Art behandelt werden, dagegen sind bei den homogenen Integralgleichungen 2. Art algebraische Gleichungen höheren Grades als bei Verwendung der alten Methode zu lösen. Es werden Anhaltspunkte für die Größe des Fehlers gegeben. *Collatz (Karlsruhe).*

Frolow, Vladimir: Utilisation du coefficient de corrélation dans l'analyse harmonique. *C. R. Acad. Sci., Paris* 213, 56—57 (1941).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Skalicky, Václav: Methodik der Mathematik der Kollektiverscheinungen. *Čas. mat. fys.* 70, D 186—D 209 (1941) [Tschechisch].

Betrachtungen über die Unterrichtsmethoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungsmathematik. *B. Hostinský (Brünn).*

Copeland, Arthur H.: Postulates for the theory of probability. *Amer. J. Math.* 63, 741—762 (1941).

Das angegebene Axiomensystem für die Wahrscheinlichkeitsrechnung legt eine Menge B von Booleschen Elementen (zu interpretieren als Ereignisse), eine Unter-
menge A von B und die Menge der reellen Zahlen zugrunde. Als Operatoren werden außer den Booleschen Verknüpfungen \cdot , \vee , \sim (und, oder, nicht) noch $x \subset y$ (x , wenn y) und p eingeführt. $x \subset y$ ist nahe verwandt dem Russellschen $y \supset x$, nur daß der Wert „falsch“ für y hier nicht in Frage kommt. $p(x)$ ist eine reelle Zahl und bedeutet die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses x , $p(x \vee y)$ die Wahrscheinlichkeit, daß x oder y eintritt, $p(x \subset y)$ die Wahrscheinlichkeit, daß x beim Bestehen von y eintritt usw. Durch eine Reihe von Postulaten werden die Beziehungen zwischen den Verknüpfungen festgelegt, wobei besonders die Festlegung der Menge A interessiert. Die Elemente von A , die Atome genannt werden, sind dadurch gekennzeichnet, daß sie ganz innerhalb oder ganz außerhalb jedes anderen Ereignisses liegen, d. h. daß für ein Atom x und ein beliebiges Ereignis y entweder $x \vee y$ gleich x ist oder den

Wert 0 hat, d. h. ein Ereignis bedeutet, das nie zutrifft. $p(y \subset x)$, wo x ein Atom ist, hat daher nur den Wert 0 oder 1 und kann als Beobachtung interpretiert werden. Jedes Ereignis y kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit durch eines seiner Atome zustande kommen; daher hat $p(x \subset y)$ für alle Atome x von y den gleichen Wert. A hat den Ordnungstyp der nicht negativen ganzen Zahlen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis x durch die ersten n Atome zustande kommt, hat für unendlich werdendes n die Wahrscheinlichkeit von x als Limes. Das System ist nicht kategorisch; es reicht aber aus, wie gezeigt wird, die grundlegenden Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu gewinnen. Durch zusätzliche Definitionen ist es möglich, zu den Systemen von Kolmogoroff, v. Mises, Reichenbach u. a. zu gelangen. *Ackermann.*

Orts, José Ma.: Die Legendreschen Polynome und das Schema der wiederholten Proben. *Rev. mat. hisp.-amer.*, IV. s. 1, 198—201 (1941) [Spanisch].

Das Bernoullische Schema mit den komplementären Wahrscheinlichkeiten p, q ($p + q = 1$) führt zur diskontinuierlichen Verteilung $x_v = \binom{n}{v} p^{n-v} q^v$, $v = 0, 1, \dots, n$.

Die aus diesen Werten gebildete n -te Differenz $\Delta^n x_0 = \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} x_v$ ist gleich

$P_n(p - q)$, wobei P_n das n -te Legendresche Polynom bedeutet. Da die Folge $P_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ in jedem abgeschlossenen Intervall (a, b) mit $|a| < 1$, $|b| < 1$ gleichmäßig gegen Null strebt, folgt insbesondere, und dies ohne Benutzung der Stirlingschen Formel, $P_{2m}(0) = (-1)^m \binom{2m}{m} 2^{-2m} \rightarrow 0$, d. h. die Maximalwahrscheinlichkeit des Bernoullischen Schemas geht mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null. *Harald Geppert* (Berlin).

Quensel, Carl-Erik: Truncated normal curves and correlation distributions. *Lunds Univ. Årsskr.*, N. F. 36, Nr 15, 1—17 (1940).

K. Pearson und Lee (On the generalised probable error in multiple normal correlation [Biometrika 6, 59—68 (1908/09)]) haben die Verteilung untersucht, die dadurch entsteht, daß von einer ursprünglich normal verteilten Variablen nur die oberhalb einer festen Grenze gelegenen Werte in Betracht gezogen werden. Verf. überträgt die Fragestellung auf die zweidimensionale Normalverteilung: 1. für den allgemeinen Fall eines mit $r \neq 0$ normal verteilten Variablenpaares, in dem beide Variablen x, y der Bedingung $x \geq a$, $y \geq b$ unterworfen sind; 2. für den Sonderfall, in welchem nur eine der beiden Variablen einer derartigen Einschränkung unterworfen ist.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Dugué, Daniel: Sur un nouveau type de courbe de fréquence. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 213, 634—635 (1941).

Zur Ergänzung der bisher für Zufallsvariablen, die nur positive Werte annehmen können, üblichen zweiparametrigen Verteilungen (Normalverteilung, Galtonsche Verteilung und Pearson-Kurve Typ III) schlägt Verf. den „harmonischen Verteilungstyp“

$y = \frac{A}{x} \exp\left(-ax - \frac{b}{x}\right)$ vor, für welchen sowohl die Berechnung der Integrationskonstanten A als auch die Schätzung der Parameter a, b aus dem arithmetischen und harmonischen Mittel auf Besselsche Funktionen führt.

M. P. Geppert.

Fréchet, Maurice: Sur une loi de probabilité considérée par J. F. Steffensen. *Skand. Aktuarie Tidskr.* 24, 214—220 (1941).

Ergänzungen zu Steffensens Ausführungen [Skand. Aktuarie Tidskr. 24, 1 bis 12 (1941); dies. Zbl. 25, 201] über die zweidimensionalen Verteilungen der Form $f(x, y) = K \cdot f_1(a_1 x + b_1 y) \cdot f_2(a_2 x + b_2 y)$. Anknüpfend wird allgemein für beliebige Verteilungen in zwei Zufallsvariablen X, Y bewiesen (M = Mittelwert): $(MXY)^2 = (MX^2) \cdot (MY^2)$ gilt dann und nur dann, wenn X und Y „fast mit Gewißheit“ in linearer Abhängigkeit voneinander stehen, d. h. wenn zwei Zahlen l, m ($l \cdot m \neq 0$) existieren derart, daß die Wahrscheinlichkeit für $l \cdot X + m \cdot Y \neq 0$ Null beträgt.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Kawada, Yukiyo, and Itô Kiyosi: On the probability distribution on a compact group. 1. Proc. phys-math. Soc. Jap., III. s. 22, 977—998 (1940).

Les A. étudient les lois de probabilités définies sur un groupe topologique compact séparable G , de façon à édifier une théorie générale englobant les problèmes particuliers des chaînes de Markoff (pour un ensemble compact d'états possibles), des variables aléatoires définies sur une circonférence (pour ce dernier problème, cf. P. Lévy, ce Zbl. 19, 175 et 23, 58), etc. . . . Ils utilisent les deux propriétés suivantes de G (établies par Haar, Weyl, von Neumann, etc. . . .): a) il existe toujours une mesure invariante $m_G(E)$ et une seule définie sur G (E sous-ensemble de G) avec: $m_G(G) = 1$; b) il existe un nombre fini ou une infinité dénombrable de représentations unitaires continues irréductibles non-équivalentes, soient $D^{(0)}, D^{(1)}, \dots, D^{(r)}, \dots$, de G , qui font correspondre à tout élément s de G des matrices unitaires $D^{(r)}(s)$ d'éléments $d_{ij}^{(r)}(s)$. — Une loi de probabilité $p(E)$ est définie sur G comme d'ordinaire (à l'aide d'un corps Borelien de sous-ensembles E de G) avec cette simplification, signalée par les A., et due essentiellement à la compacité de G , que l'ensemble des lois de probabilité définies sur G est un espace de Hausdorff séparable et compact; le produit de deux lois p_1, p_2 est la loi p définie par: $p(E) = \int_G p_2(s^{-1}E) p_1(ds)$

ou symboliquement: $p = p_1 * p_2$; une loi p est stable si $p = p * p$. — Une notion analogue à celle, classique, de fonction caractéristique d'une variable aléatoire, est introduite par les A. sous le nom de matrices caractéristiques d'une loi p : ce sont les matrices $D^{(r)}(p)$ définies par: $D^{(r)}(p) = \int_G D^{(r)}(s) p(ds)$, avec la propriété fonda-

mentale: $D^{(r)}(p_1 * p_2) = D^{(r)}(p_1) \cdot D^{(r)}(p_2)$. — Les A. développent des applications de ces notions générales, en particulier à l'étude des processus de Markoff définis sur G , auxquels ils étendent les principaux résultats classiques de l'étude des chaînes de Markoff. R. Fortet (Paris).

Statistik:

Wald, Abraham: On the analysis of variance in case of multiple classifications with unequal class frequencies. Ann. math. Statist. 12, 346—350 (1941).

In einer früheren Arbeit (A note on the analysis of variance with unequal class frequencies [Ann. math. Statist. 11, 96—100 (1940)]) hat Verf. für das Verhältnis σ'^2/σ^2 aus der Streuung σ'^2 zwischen den Klassen und der Reststreuung σ^2 bei einfacher Streuungszerlegung Vertrauensgrenzen abgeleitet. In der vorliegenden Arbeit werden die Methode auf zwei- und mehrfache Streuungszerlegung ausgedehnt und für die entsprechenden Streuungsverhältnisse Vertrauensgrenzen hergeleitet. M. P. Geppert.

Uyen, M. J. van: Likelihood as conditioned probability. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 947—955 (1941).

In einer grundlegenden Arbeit [On the mathematical foundations of theoretical statistics, Philos. Trans. Roy. Soc. London A 222, 309—368 (1922)] sowie auch in späteren Arbeiten hat R. A. Fisher die Beziehungen zwischen dem „Likelihood“-Begriff und der α -posteriorischen Bayesschen Rückschluß-Verteilung („inverse frequency distribution“) geklärt und als wesentlich betont, daß die Likelihood nicht mit der Dichte der kontinuierlichen Rückschlußverteilung zu identifizieren ist, da sie ja im Gegensatz zu letzterer nicht mit einem Differentialelement behaftet ist. Verf. beweist unter Heranziehung der Transformation der unbekannten Parameter auf kanonische Variablen, d. h. solche mit konstanter α -priorischer Verteilungsdichte, die Unabhängigkeit der Maximum-likelihood-Schätzung und ihres mittleren Fehlers von der α -priorischen Verteilung der gesuchten Parameter, wobei er allerdings die bereits von R. A. Fisher gewonnenen, für die Likelihood geltenden Resultate bedenkllicherweise für die Dichte der α -posteriorischen Verteilung formuliert. M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Hsu, Chung Tsi: Samples from two bivariate normal populations. *Ann. math. Statist.* **12**, 279—292 (1941).

Es liegen zwei zweidimensionale Normalverteilungen der Zufallsvariablen x_1, x_2 bzw. x'_1, x'_2 mit den unbekannten Mittelwerten ξ_1, ξ_2 bzw. ξ'_1, ξ'_2 , den mittleren quadratischen Abweichungen σ_1, σ_2 bzw. σ'_1, σ'_2 und den Korrelationskoeffizienten ρ bzw. ρ' vor. Verf. stellt unter Anwendung der Neyman-E. S. Pearsonschen Likelihood-Verhältnis-Methode und Zuhilfenahme der vereinfachenden Transformation $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $X' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1 - x'_2)$, $Y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_1 + x'_2)$ Kriterien auf für den Vergleich der Korrelationskoeffizienten, d. h. für die Prüfung der Annahme $\rho = \rho'$, vorausgesetzt, daß $\sigma_1 = \sigma_2$, und $\sigma'_1 = \sigma'_2$, oder daß $\sigma_1 = \sigma_2$, $\xi_1 = \xi_2$ und $\sigma'_1 = \sigma'_2$, $\xi'_1 = \xi'_2$ sei. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Paulson, Edward: On certain likelihood-ratio tests associated with the exponential distribution. *Ann. math. Statist.* **12**, 301—306 (1941).

Die von Neyman und E. S. Pearson stammende Likelihood-Verhältnis-Methode wendet Verf. auf die Prüfung dreier verschiedener Hypothesen über die Parameter der Exponentialverteilung $\sigma^{-1} \exp(-(x - B)\sigma^{-1}) dx$ ($B \leq x \leq \infty$) an Hand von Stichproben an. Behandelt werden die Hypothesen: I. $B =$ gegebener Wert, σ bekannt; II. $B =$ gegebener Wert, σ unbekannt; III. zwei beobachtete Stichproben stammen aus Exponentialverteilungen mit gleichen B -Werten, wobei Übereinstimmung der σ -Werte vorausgesetzt wird. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Gårding, Lars: The distributions of the first and second order moments, the partial correlation coefficients and the multiple correlation coefficient in samples from a normal multivariate population. *Skand. Aktuarie Tidskr.* **24**, 185—202 (1941).

Unter Benutzung der charakteristischen Funktion leitet Verf. auf neuem Wege die bereits bekannten Verteilungen der Momente 1. und 2. Ordnung, der partiellen Korrelationskoeffizienten und des multiplen Korrelationskoeffizienten von Stichproben aus einer mehrdimensionalen, normal verteilten Gesamtheit ab. *M. P. Geppert*.

Mood, A. M.: On the joint distribution of the medians in samples from a multivariate population. *Ann. math. Statist.* **12**, 268—278 (1941).

Die bekannte Tatsache (S. S. Wilks, *Statistical inference*. Ann. Arbor, Edwards Bros. 1937), daß unter gewissen, recht allgemeinen Voraussetzungen die Verteilung der Stichprobenmedianwerte einer eindimensionalen Verteilung annähernd normal ist, wird auf 2-, 3- und k -dimensionale Verteilungen ausgedehnt. *M. P. Geppert*.

Andreoli, Giulio: Statistica degli aggregati in una collettività e concentrazione rispetto a due caratteri. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend.*, IV. s. **10**, 160—172 (1940).

Die Arbeit befaßt sich zunächst mit der Ausdehnung der Ginischen Begriffe Konzentrationskurve und -index auf Gesamtheiten, die aus mehreren nach demselben akkumulierbaren Merkmal verteilten Teilgesamtheiten zusammengesetzt sind. Ferner werden Gesamtheiten betrachtet, deren Individuen in Gruppen („Familien“, Individuen zweiter Ordnung) zusammengefaßt sind, und die Konzentration der Familienumfänge definiert. Schließlich folgen Ansätze zur Ausdehnung des Konzentrationsbegriffs auf eine nach zwei akkumulierbaren Merkmalen verteilte Gesamtheit. Hierbei wird der neuartige Gedanke verwertet, eine nach einem akkumulierbaren Merkmal verteilte Gesamtheit aufzufassen als eine Gesamtheit von „Merkmalsquanten“, die jeweils in „Familien“ vereinigt sind. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Jordan, Charles: Remarques sur la loi des erreurs. *Acta Sci. Math.* Szeged **10**, 112—133 (1941).

L'auteur expose rapidement les principes de la théorie des erreurs selon Gauss, ses précurseurs et ses disciples. Il se livre au cours de cet exposé à de nombreuses remarques d'ordre critique, historique et pratique. Il démontre les formules classiques, avec le souci de mettre en évidence qu'elles se placent dans l'une ou l'autre des hypo-

thèses suivantes: A: La fonction de répartition a priori de la grandeur z à mesurer est de la forme Kdz ($K = \text{constante}$). L'écart quadratique moyen de la loi d'erreur est une constante non aléatoire. Dans ces conditions, la valeur la plus probable a posteriori de z est la moyenne arithmétique des mesures. — B: La valeur à mesurer est considérée comme non aléatoire. L'écart quadratique moyen de la loi d'erreur est une variable aléatoire ζ dont on suppose la fonction de répartition a priori de la forme $Hd\zeta$ ($H = c^{te}$). Dans ces conditions, la valeur la plus probable a posteriori de ζ^2 est égale à σ^2 (écart quadratique empirique). — C: z et ζ sont aléatoires, obéissant aux lois $Hd\zeta$, Kdz ($H, K = c^{te}$). La valeur la plus probable a posteriori de ζ^2 est $\frac{n}{n-1} \sigma^2$ ($n = \text{nombre de mesures}$). — L'au. propose de modifier l'hypothèse C en prenant pour ζ une loi de probabilité de la forme $\zeta^{-\alpha} d\zeta$. Dans ces conditions, la valeur la plus probable de ζ^2 devient $\frac{n}{n+\alpha-1} \sigma^2$. — L'hypothèse de l'au. semblant préférable à l'hypothèse C dans les cas pratiques, et α devant être > 1 , il faut conclure que la correction qui consiste à remplacer σ^2 par $\frac{n}{n-1} \sigma^2$ dans l'estimation de ζ^2 est non seulement illusoire, mais encore nuisible. L'au. traite également le cas d'un problème à plusieurs dimensions. J. A. Ville (Paris).

Dore, Paolo: Sulla valutazione degli errori accidentali di una livellazione di precisione. Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, N. s. 44, 31—36 (1940).

Die Güte eines Nivellements hoher Genauigkeit wird auf Vorschlag der Internationalen Erdmessung aus dem Jahre 1912 nach den Lallemandschen Formeln berechnet. Verf. zeigt, daß die Einwände gegen diese Formeln vom Standpunkt der Fehlertheorie aus nicht stichhaltig genug sind, um von diesen internationalen Formeln abzugehen. Sutor (Berlin).

Vernotte, Pierre: Sur la représentation d'une fonction expérimentale par une fraction rationnelle. C. R. Acad. Sci., Paris 213, 433—435 (1941).

Proseguendo i suoi studi sull'argomento (questo Zbl. 23, 346, 347; 24, 432), l'A. espone alcuni criteri complementari per l'applicazione del proprio metodo atto a rappresentare una funzione sperimentale con una frazione razionale, il che avviene con riguardo ai casi seguenti: 1) equidistanza delle ordinate sperimentali ovvero riduzione grafica a questo caso; 2) utilizzazione dei valori medi sperimentali. L'applicazione del metodo in oggetto a delle esperienze di convezione ha consentito di raggiungere l'approssimazione del millesimo sino al decimillesimo, conformemente a quanto viene richiesto dalle più accurate esperienze della fisica. M. Bossolasco (Milano).

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Andreoli, Giulio: Schema statistico di evoluzione e di selezione in una collettività a monoidrismo mendeliano. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 10, 260—280 (1940).

Unter der Annahme zufallsmäßiger Paarung leitet Verf. bei einem einortigen, durch zwei Allele A, a bedingten Vererbungsvorgang die Gesetze der Bevölkerungsentwicklung ab. Auf den Hardy-Pearson'schen Erhaltungssatz folgt die Untersuchung verschiedener Auslesevorgänge in den Genotypen bzw. in den Genen, wobei Verf. besondere Aufmerksamkeit der Frage der Stabilität der stationären Zustände zuwendet. Neue Ergebnisse enthält die Arbeit nicht. Die reiche Literatur über das Gebiet, etwa die Arbeiten von Haldane, O. Mittmann und Geppert-Koller, findet weder Erwähnung noch Beachtung. Harald Geppert (Berlin).

Geiringer, H., et C. Kosswig: Calculs sur la transformation de la hétérogamétie mâle et hétérogamétie femelle. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A: Math. 6, 44—55 (1941).

Bei der üblichen Theorie der Geschlechtsvererbung mittels der beiden Geschlechtschromosomen X, Y sind etwa die XX weiblich, die XY männlich. Gewisse Erfahrungen

an niederen Tierarten zeigen, daß von den Spalterbigen XY ein gewisser Bruchteil p weiblich manifestieren kann (irreguläre Weibchen) und infolgedessen auch irreguläre Männchen YY vorkommen. Unter der Annahme eines festen p , regelloser Durchmischung, gleicher Fruchtbarkeit und der Gültigkeit der Mendelschen Regeln leiten Verff. die Rückschlußformeln für die Generationen einer Bevölkerung her; sind x_v, y_v die Häufigkeiten der XX bzw. YY in der v -ten Generation, so gilt

$$x_{v+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(1-p)(1-x_v-y_v)}{(1-p)(1-x_v)+py_v} \cdot \frac{p(1-y_v)+(2-p)x_v}{p(1-y_v)+(1-p)x_v},$$

$$y_{v+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{p(1-x_v-y_v)}{p(1-y_v)+(1-p)x_v} \cdot \frac{(1-p)(1-x_v)+(1+p)y_v}{(1-p)(1-x_v)+py_v}.$$

Verff. stellen lediglich die Eindeutigkeit des (von dem Ausgangszustand unabhängigen) Grenzzustandes $\lim x_v, \lim y_v$ im Bereiche $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ fest. Für $p = 0$ besteht er in der normalen Geschlechtsvererbung und wird spätestens in der dritten Generation erreicht, analog für $p = 1$. Harald Geppert (Berlin).

Baltensperger, Paul: Über die Vorausberechnung der Sterblichkeit der schweizerischen Bevölkerung. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. **41**, 109–161 (1941).

Im ersten Teil wird die Sterblichkeit der männlichen schweizerischen Bevölkerung als Funktion des Alters und der Zeit untersucht. Eine Sterblichkeitsfläche für den Zeitraum 1878–1935 wird konstruiert, der Verlauf der Kurven $t - x = \tau = \text{konst.}$, $x = \text{konst.}$ untersucht und die wichtigsten Gruppen von Todesursachen in dem erwähnten Zeitabschnitt verfolgt. Auf Grund einer Analyse der betreffenden Ergebnisse und unter Anwendung einfacher Hypothesen wird der wahrscheinliche Wert berechnet, gegen den die Sterbenswahrscheinlichkeit der männlichen schweizerischen Bevölkerung vermutlich ungefähr konvergiert. — Im zweiten Teile wird gezeigt, daß für die männliche schweizerische Bevölkerung keine Makehamfläche, die eine der Formen

$\mu(t, \tau) = m_1 + m_2 e^{k_1 t} + m_3 e^{k_2 \tau} + m_4 e^{k_1 t + k_2 \tau}$ oder $\mu(t, \tau) = m_1 + m_2 e^{k_1 t + k_2 \tau}$ haben müßte, in Betracht kommt. Eine einfache und brauchbare analytische Darstellung wird durch die Formel (1) $q(x, t) = q(x, \infty) + \Delta(q) e^{-t}$ erhalten, wenn die festen Zahlenreihen $q(x, \infty)$ und $\Delta(q)$ durch Funktionen dargestellt werden, und zwar in der Gestalt $\mu(x, t) = a + bc^x + (rx^2 + sx + p)e^{-t}$. Während diese Formeln von einem festen Kalenderjahr ausgehen, wird noch eine Lösungsform angegeben, der eine generationsweise Betrachtung zugrunde liegt. — Im dritten Teil werden auf Grund der obigen Untersuchungen zahlenmäßige Angaben über die zukünftige vermutliche Entwicklung der männlichen schweizerischen Bevölkerung vom Alter 25 an gemacht. Formel (1) wird zur Herleitung der Absterbeordnungen für $\tau = t = \infty, \tau = 1$. I. 1916, 1901/10 benützt und einige Versicherungswerte werden berechnet und verglichen.

Janko (Prag).

Goldziher, K.: Logistische Bearbeitung der säkularen Änderungen in der Niederländischen Volkssterblichkeit mit versicherungsstatistischen Anwendungen. Verzekeerings-Arch. **23**, 40–72 (1942).

Diese Arbeit behandelt die rechnerische Kennzeichnung jener überdauernden Trendbewegungen, welche zur notwendigen dynamischen Färbung der versicherungstechnischen Abschätzungen und Korrekturen bei gerechten Lastenverteilungs- bzw. Erfolgsberechnungen in statistisch plausibler Art verwertet werden könnten. Zuerst wird die erweiterte logistische Zeitfunktion nach rechnungsmäßigen Forderungen festgelegt, um darauf jene ihrer Eigenschaften zusammenzustellen, welche bei der numerischen Auswertung für bestimm-autokatalytische Vorgänge in Betracht zu ziehen sind. Der notwendige Formelapparat wird zusammengestellt für die Normalformen mit drei Konstanten, geradlinige Formen, die Inflexionstendenz und Berechnung des Parameterwertes. Nach der dargestellten Methodik wird die zeitliche Extrapolation der niederländischen Volkssterblichkeit berechnet. Als versicherungstechnisch brauchbare Anwendung der Untersuchungen wird die logistische Umwandlung der bisher meistens nach exponentieller Art ausgeführten Fortschreibung der Rentnersterbefafeln

durchgeführt. Zum Schluß wird als ein recht empfindliches Maß für die Kennzeichnung der dynamisch gefärbten Homogenität von Altersgruppen die Variationsweite aus den einzelnen zeitlichen Altersreihen berechnet. Alle Resultate sind in fünf Tabellen zusammengestellt und die betreffende Literatur zugefügt. *Janko (Prag).*

Derksen, J. B. D.: Die Berechnung von Sterbenswahrscheinlichkeiten bei der Zusammenfassung von Sterbetafeln; eine mathematisch-statistische Studie. Verzekerings-Arch. 23, 15—39 (1942) [Holländisch].

Van Pesch hatte bei der Aufstellung der niederländischen Bevölkerungstafeln die einfachen arithmetischen Mittel aus den Sterbenswahrscheinlichkeiten aufeinanderfolgender Jahre gebildet, ihre Zusammenfassung in gewogenen arithmetischen Mitteln also verworfen. Seine Begründung, daß die jährliche Schwankung der Sterbenswahrscheinlichkeiten nur zum kleineren Teil zufallsmäßig sei, zum überwiegenden Teil aber auf Änderungen des Einflusses der einzelnen Todesursachen zurückgehe, hat er später aufgegeben, als sich die säkulare Verminderung der Sterblichkeit als erheblich herausstellte. — Die Untersuchung des Verf. mit den Hilfsmitteln der neueren mathematischen Statistik an Hand von Einzelrechnungen ergibt, daß das gewogene arithmetische Mittel mit einem Korrekturglied zu versehen ist, wodurch es praktisch dem einfachen arithmetischen Mittel gleich wird. — Ergänzend stellt Verf. u. a. rechnerisch fest, daß keine Korrelation zwischen den Sterbenswahrscheinlichkeiten aufeinanderfolgender Jahre besteht, aber eine starke Korrelation zwischen den Sterbenswahrscheinlichkeiten benachbarter Alter. *Härlen (Berlin).*

Schärf, Henryk: Über einige Variationsprobleme der Versicherungsmathematik. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 41, 163—196 (1941).

In dieser bemerkenswerten Arbeit zeigt Verf., daß die verschiedenen Kenntnisse über die Abhängigkeit von Deckungskapital und Prämien einer Individualversicherung von ihren Rechnungsgrundlagen ihren gemeinsamen Ursprung in formellen Eigenschaften gewisser Summen bzw. Integraldarstellungen haben. Die durch systematische Untersuchung dieser Eigenschaften gewonnene Theorie wird auf folgende Fragestellungen angewendet: 1. Berechnung der Prämien- und Rücklagenvariation bei Änderung der Rechnungsgrundlagen und Versicherungsleistungen. — Diese Aufgabe wird völlig gelöst. — 2. Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Rücklageninvarianz. — Daraus folgt u. a. sofort eine verallgemeinerte Fassung des Fundamentalsatzes der Cantellischen Kapitalansammlungstheorie sowie der Nachweis, daß bei Lebensversicherungen mit Gewinnbeteiligung eine nach Versicherungsbeginn eintretende Änderung der Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung immer durch eine Dividendenvariation ohne Änderung des vollständigen Deckungskapitals kompensiert werden kann. — 3. Angabe von Kriterien für das Verhalten des Vorzeichens einer Rücklagen- bzw. Prämienvariation. — Unter den abgeleiteten Kriterien (von denen ein „Zeichenwechselsatz“ den Moserschen umfaßt) besitzt ein „Zeichenbewahrungssatz“ eine bedeutende Anwendungsfähigkeit. — Bezüglich der einzelnen Sätze und deren zahlreicher Anwendungen muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Außerhalb des geschilderten Problemkreises liegt eine sich unterwegs ergebende einparametrische Funktionalgleichung der Deckungsrücklage und die in der wohl allgemeinsten Form bewiesene Prämienzerlegung in Spar- und Risikoteil. *Saxer (Zürich).*

Christen, Hans: Eine Bemerkung zum Thema: Das Deckungskapital der gemischten und der terme-fixe-Versicherung bei Änderung der Sterblichkeit. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 41, 197—200 (1941).

Die von Lidstone bewiesenen Beziehungen über die Änderung des Deckungskapitals der gemischten Versicherung bei Änderung der Sterblichkeit werden auf einfache Art mit Hilfe der Goldmannschen Reservenvariationsformel abgeleitet. Die Resultate für das Deckungskapital der gemischten Versicherung werden auf Grund der Beziehungen von Jéquier auf die terme-fixe-Versicherung übertragen. Das Deckungskapital dieser Versicherung ändert sich in gleichem Sinne wie bei der gemischten Versicherung. *Janko (Prag).*

Hagstroem, K.-G.: The general life assurance. Skand. Aktuarie Tidskr. 24, 137—158 (1941).

Es wird eine allgemeine Lebensversicherung in ihren möglichen Phasen vom Anfang $t = 0$ bis zum Ende verfolgt. Die Versicherung befindet sich immer in einer der möglichen Phasen, welche durch die Zusammensetzung der Gruppe von versicherten Leben, die im gegebenen Augenblicke in Betracht kommen, charakterisiert ist. Handelt es sich um eine Versicherung der Gruppe Mann, Weib, Sohn und Tochter, so kann nach der Zeit t eine Phase der Versicherung bestehen, in der alle vier Personen am Leben sind, eine andere Phase, in der z. B. der Mann tot ist, und andere ähnliche. Die Endphase wird definiert als der Fall, daß kein Todesrisiko für die Zukunft mehr besteht. Die Betrachtungen werden auf Versicherungen mit endlicher Zahl der Phasen beschränkt. Zu jeder Phase der Versicherungspolice wird die prospektive Reserve durch eine Differentialgleichung definiert. Für den mittleren Wert der Reserve, der das wahrscheinliche Kapital des stationären Geschäftes vorstellt, wird ein System von Differentialgleichungen angegeben. Darauf wird eine Definition des Modulus der Lebensversicherungspolice vorgeschlagen, welche den realen Inhalt des Versicherungsschutzes messen soll; das Sparkapital wird vollkommen eliminiert. *Janko* (Prag).

Haaf ten, M. van: Kombinationen von Lebensversicherungen auf 0, 1 und 2 Leben. Verzekerings-Arch. 23, 73—74 (1942) [Holländisch].

Aufstellung und Vergleich der Barwerte für einmalige Versicherungsleistungen bei Versicherungen auf 0 Leben (Sparvertrag; „Versicherung auf feste Zeit“ mit Barwert unabhängig von Sterblichkeit), auf 1 und 2 Leben. *Härten* (Berlin).

Kreis, H.: Zerfällung einer Gesamtheit in Aktiven- und Invalidengruppen. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 41, 205—209 (1941).

Bemerkung betreffend die Darstellung des Abbaues einer Gesamtheit in Aktive und Invalide. *Saxer* (Zürich).

Sibirani, F.: Sugli ammortamenti continui. Giorn. Ist. Ital. Attuari 12, 1—13 (1941).

Wird die Tilgungsquote in 5 verschiedenen Weisen definiert, und zwar auf Grund: A) des Barwertes, B) des Endwertes, C) der Kapitalabschlagszahlungen samt Zinsen ab Beginn, D) der ab letzter Fälligkeit abgezinsten Quote des Endwertes, E) der Quote der restlichen Schuld, so sind diese 5 Definitionen einander nicht mehr äquivalent (sondern nur A zu C und B zu D), wenn die Kapitalisierung nach Cantelli „nicht zerlegbar“ ist, d. h. wenn die Zinsintensität δ am Zeitpunkt t auch von dem Zeitpunkt t_0 , in dem die Operation als abgeschlossen betrachtet wird, abhängig ist.

Bruno de Finetti (Trieste).

Dasen, E.: Note sur l'approximation du taux effectif des emprunts par obligations amortissables par le système de l'annuité constante. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 41, 201—204 (1941).

L'A. si chiede quale errore si commetta calcolando il saggio di rendimento di un prestito rimborsabile col sistema delle „annualità costanti“ senza tener conto che in pratica le annualità non possono essere esattamente uguali. Egli si limita però alla valutazione numerica su un esempio particolare.

Bruno de Finetti (Trieste).

Barracco, E.: Modificazioni di una formula per il calcolo dei corsi teorici dei titoli a reddito fisso, nel caso in cui si tenga conto delle imposte e tasse. Giorn. Ist. Ital. Attuari 12, 43—52 (1941).

Verf. untersucht, wie die Formel für die Berechnung des theoretischen Kurses von festverzinslichen Wertpapieren zu ergänzen ist, wenn Steuern und Umlagen berücksichtigt werden sollen. Dabei betrachtet er insbesondere die gegenwärtig in Italien zu bezahlenden Steuern und Umlagen.

Bruno de Finetti (Trieste).

Palomba, Giuseppe: Elementi matematici per l'economia corporativa. (Il problema di „minimo“ posto dalle corporazioni.) Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 10, 303—309 (1940).

Nach dem Verf. unterscheidet sich das körperschaftliche Wirtschaftssystem vom liberalen durch die Möglichkeit, das ökonomische Minimumproblem einheitlich, statt

streckenweise, zu betrachten und zu lösen. Die so entstehenden Ersparnisse sollen jedoch mit den Kosten der diesbezüglichen Organisation verglichen werden.

Bruno de Finetti (Trieste).

Ricci, Umberto: Ein dynamisches Nachfragegesetz. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforsch. 7, 103—124 (1941).

Accennato alla legge della domanda nel senso classico (Cournot, Marshall) e nel senso storico-statistico, l'A. si sofferma sulla legge dinamica nel senso di Evans, in cui la domanda dipende oltre che dal prezzo dalla sua tendenza a salire o scendere (analiticamente: dal prezzo e dalla sua derivata rispetto al tempo), e chiarisce le ragioni e le conseguenze economiche di una simile relazione (teoria ciclica della congiuntura).

Bruno de Finetti (Trieste).

Andreoli, Giulio: Sull'analisi statistica di fatti economici ed in generale di fenomeni di scambio. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 10, 128—136 (1940).

Kommen den Waren P_1, \dots, P_n pro Wareneinheit die Preise p_1, \dots, p_n in Geldeinheiten zu, so läßt sich der herrschende Preisstand des Marktes durch die Matrix

$$P = \begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \frac{1}{p_1} & 1 & \frac{p_2}{p_1} & \cdots & \frac{p_n}{p_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p_n} & \frac{p_1}{p_n} & \frac{p_2}{p_n} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

kennzeichnen, in welcher die Zahlen der $(k+1)$ -ten Kolonne die der Einheit der Ware P_k äquivalenten Geld- bzw. Warenmengen und die Zahlen der $(r+1)$ -ten Zeile die der Einheit des Geldes bzw. irgendeiner Ware entsprechenden Mengen der Ware P_r bedeuten. Ihre Invariante ist die Summe ihrer Elemente:

$$J_p = (1 + p_1 + \cdots + p_n) \left(1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} \right) = (1 + n \cdot m) \left(1 + \frac{n}{\mu} \right),$$

wo m und μ das arithmetische und harmonische Mittel der n Preise p_1, \dots, p_n bezeichnen. Zum Vergleich zweier verschiedener Marktlagen werden entweder die Invarianten verglichen, oder aber es wird durch Division der entsprechenden Elemente eine der Preismatrix ähnliche Indexmatrix mit arithmetischem und harmonischem Mittel j und η gebildet und aus deren Invariante ein Maß $\omega_i = 1 - (n+1)^2 (1+nj)^{-1} \left(1 + \frac{n}{\eta} \right)^{-1}$

konstruiert, welches für unveränderte Marktverhältnisse verschwindet und, wenn einer der Indizes unbegrenzt wächst, gegen 1 strebt. Verf. betrachtet außerdem als Vergleichsgröße das Verhältnis ϱ der Invarianten der zu vergleichenden Matrizen, die Größe $\sigma = 1 - 2 \left(\varrho + \frac{1}{\varrho} \right)^{-1}$ und das mittels des „äquivalenten Mittels“ α jeder der beiden Matrizen gebildete Maß $\beta = 1 - 2 \left(\frac{\alpha''}{\alpha'} + \frac{\alpha'}{\alpha''} \right)^{-1} = (\alpha'' - \alpha')^2 (\alpha''^2 + \alpha'^2)^{-1}$,

wo α so bestimmt ist, daß die Invariante $(1 + n\alpha) \left(1 + \frac{n}{\alpha} \right)$ der Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \frac{1}{\alpha} & 1 & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

gleich derjenigen der betreffenden Matrix P' bzw. P'' ist. Entsprechend lassen sich statt der Preismatrizen die Matrizen der gegenseitigen Warenaustausche und der gegenseitigen Austauschwerte verschiedener Märkte vergleichen.

M. P. Geppert.